تحليل السلاسل الزمنية

(في مجال التكرار ومجال الزمن)

بسم الله الرحمن الرحيم

الطبعة الأولى

٢٠١٦م

المملكة الأردنية الهاشمية

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية

تحليل السلاسل الزمنية

الدكتور : زين العابدين البشير

دار الجنان للنشر والتوزيع

عمان – العبدلي - مجمع جوهرة القدس التجاري – ط(M)

- هاتف: ٠٠٩٦٢ ٦ ٤٦٥٩٨٩١ تلفاكس: ٠٠٩٦٢ ٦ ٤٦٥٩٨٩٢
- موبايل: ٠٠٩٦٢ ٧٩٥٧٤٧٤٦٠ موبايل: ٠٠٩٦٢ ٧٩٦٢٩٥٠٤٥٧
- هاتف السودان – الخرطوم ٠٠٢٤٩ ٩١٨٠٦٤٩٨٤
- ص.ب ٩٢٧٤٨٦ الرمز البريدي ١١١٩٠ العبدلي
- البريد الإلكتروني: dar_ jenan@yahoo.com

daraljenanbook@gmail.com

تحليل السلاسل الزمنية

(في مجال التكرار ومجال الزمن)

الدكتور

زين العابدين عبدالرحيم البشير

أستاذ في الإحصاء – جامعة النيلين



مقدمة

تتوفر كثير من البيانات في شكل مشاهدات مأخوذة حول ظاهرة ما في فترات زمنية متتالية. مثل هذه "السلاسل الزمنية" – كما تسمي – تحوى عادة في ثناياها معلومات متنوعة عن الظاهرة محل الدراسة. ويهدف التحليل الإحصائي للسلسلة الزمنية لاستخلاص أكبر قدر ممكن من هذه المعلومات. بصفة خاصة ، يمكن أن يقود التحليل لمعرفة التغيرات التي تؤثر على السلسلة الزمنية من حيث طبيعتها ومدى تأثيرها. كما أننا قد نتمكن من التوصل لنموذج (أى تصور مبسط) للكيفية التى نتجت بها القيم المشاهدة في السلسلة. مثل هذا النموذج لا يتيح الفرصة لفهم أعمق لمسار الظاهرة مع الزمن فحسب ، وانما أيضاً يسمح بالتنبؤ بالقيم المستقبلية لها.

وفى هذا الكتاب محاولة للتعريف بالطرق الأساسية المستخدمة في تحليل السلاسل الزمنية والتى نشط البحث فيها بصفة خاصة في النصف الثاني من القرن العشرين. وقد تمثل ذلك في الأعمال الرائدة لأشخاص مثل بوكس ، جنكنيز ، انجلز ، هولت ، وينترز وغيرهم ممن أثرى المعرفة في هذا المجال. ولابد أن نتذكر هنا أيضاً ونحن نتحدث عن الانجازات – الرواد المؤسسين الذين وضعوا اللبنات الأولى لهذا الفرع من الإحصاء في نهاية القرن التاسع عشر وبدايات القرن العشرين وأبرزهم ثايل ، شستر ويول.

ولأن الهدف الأساسي للكتاب هو إضافة مقدمة باللغة العربية في تحليل السلاسل الزمنية تتيح للقارئ التعرف على التقنيات الأساسية المتوفرة في هذا المجال ، فقد كان لابد أن يتسم تناول المواضيع فيه بدرجة توائم بين الشمول والعمق. ولهذا سيجد القارئ نفسه متنقلاً بين طرق تقوم على مفاهيم بسيطة (مثل طرق التجزئة) وطرق متقدمة (مثل نمازج أريما).

وبين تقنيات تستند إلى مجرد الحدس والمنطق وأخرى تقوم على نظريات إحصائية مثبتة.

ولا يتطلب استيعاب مادة الكتاب ، بشكل عام ، إلماماً بطرق إحصائية أو رياضية متقدمة . وهو يصلح بمقتضى المواضيع التى تناولها كمرجع لمادة على مستوى البكالوريوس لطلاب الإحصاء كما يصلح كمرجع مساعد لمادة على مستوى الماجستير في السلاسل الزمنية.

ولابد أن أشير وأنا أعرف بالكتاب إلى الجهد المميز الذي بذله الأستاذ طارق رحمة محمد في طباعة وإخراج الكتاب حتى انتهي إلى الشكل الذي هو عليه الآن.

واختم بحمد الله تعالى على كل ما تفضل به من نعمائه علينا

المؤلف

الباب الأول

مفاهيم أساسية

١,١ السلسلة الزمنية Time series

يمكن تعريف السلسة الزمنية بأنها مجموعة من المشاهدات التى حدثت بالتتالي مع الزمن. وإذا كانت المجموعة متصلة توصف السلسة الزمنية بأنها سلسلة زمنية متصلة **continuous time series**. أما إذا كانت متقطعة فإنها تسمى سلسلة زمنية متقطعة **discrete time series**. وفي هذا الكتاب سنهتم فقط بالسلاسل الزمنية المتقطعة ، وتحديداً التي تؤخذ فيها المشاهدات في فترات زمنية متتالية ومتساوية. والفترة المقصودة هنا قد تكون سنة ، شهر ، يوم ، ثانية ...الخ. ومن أمثلة السلاسل الزمنية الدخل القومي لبلد لعدد من السنوات المتتالية ، ودرجات الحرارة في عدد من الساعات.

ويرمز للمشاهدات في سلسلة حجمها n ب $Y_1, Y_2, ..., Y_t ..., Y_n$ حيث Y_t قيمة الظاهرة في الزمن t. ويمكن النظر للقيم المشاهدة في السلسلة الزمنية كتحقق **realization** معين لعملية تصادفيه خفية هي المسئولة عن النمط المشاهد في السلسلة.

من ناحية أخرى ، قد يمكن معرفة القيم المستقبلية للسلسلة الزمنية تماماً من خلال صيغة رياضية محددة. نصف السلسلة الزمنية في هذه الحالة بأنها محددة **deterministic time series**. أما إذا كنا لا نستطيع التعبير عن القيم المستقبلية للسلسة الزمنية إلا من خلال عبارات احتمالية ، أي لا يمكن التأكد مما ستكون عليه القيم ، فإن السلسلة الزمنية توصف بأنها سلسلة زمنية إحصائية **statistical time series**. وهذا النوع الأخير من السلاسل الزمنية هو ما نسعى لدراسته.

١,٢ تحليل السلسلة الزمنية Time- series analysis هناك عادة هدفان لتحليل السلسلة الزمنية: معرفة طبيعة السلسلة الزمنية واستخدامها للتنبؤ.

١,٢,١معرفة طبيعة السلسلة الزمنية

هذا الهدف يسعى إليه من يرغب في معرفة النمط الذي تعكسه السلسلة الزمنية ونوع التغيرات التى تحتويها. وهنا تبرز أسئلة مثل : هل تحوى السلسلة الزمنية تغيرات موسمية تتكرر بفترات ثابتة ؟ هل للسلسلة اتجاه عام بشكل ما تسلكه ؟ ... الخ.

تاريخياً هناك منهجان في هذا الإطار .الأول ينظر للسلسلة الزمنية على أنها ناتجة عن عدة أنواع (عادة أربعة) من التغيرات. ويهدف التحليل لعزل وقياس (ما يمكن قياسه من) هذه التغيرات ، عن طريق تجزئه التغير الكلى في قيم السلسلة الزمنية إلى مكونات. كل مكون يمثل نوعاً من التغيرات.

والطرق التى تستخدم في هذا المنهج تسمى طرق التجزئة **decomposition methods**. وتنبثق هذه الطرق كلها من الطريقة الأساسية المسماة طريقة التجزئة التقليدية **the classical decomposition method**.

أما المنهج الثاني فيعتبر السلسلة الزمنية ناتجة عن موجات جيب خفيه ذات أطوال وتكرارات مختلفة. ويهدف التحليل في هذه الحالة لاكتشاف الموجات ذات التأثير الأكبر على السلسة الزمنية، وتحديد أطوالها وتكراراتها. ويتحقق ذلك من خلال ما يسمى بالتحليل الطيفي **spectral analysis** .

١,٢,٢التنبؤ من السلسلة الزمنية

عندما يكون الهدف هو التنبؤ بالقيم المستقبلية للسلسلة الزمنية ، يكون التركيز على الاستفادة من النمط الذي تبرزه القيم الحالية والماضية (التاريخية) للسلسلة في التوصل لنموذج رياضي يمثل بدرجة معقولة ذلك النمط ، حتى يمكن استخدامه في التنبؤ بالقيم المستقبلية للسلسلة.

والنموذج المعنى قد يستند فقط على قيم السلسلة الزمنية ، فيوصف في هذه الحالة بأنه نموذج سلسلة زمنية **time- series model** ، وقد يعتمد على متغيرات أخرى يعتقد أن لها دوراً في النمط المشاهد في السلسلة الزمنية ، فيشار إليه بأنه نموذج سببي **causal model**.

ومن أهم نماذج السلاسل الزمنيةِ نماذج التمهيد الأسى ونماذج أريما. بينما تمثل نماذج الانحدار ونماذج الاقتصاد القياسي مثالاً للنماذج السببية.

١،٣ تحرير السلسلة الزمنية Editing of a time series

يسبق تحليل السلسلة الزمنية تحريرها أو تعديلها إذا كان ذلك ضرورياً لإزالة التأثيرات على قيمها الناتجة عن الاختلافات في التقويم الزمني ، الأسعار وحجم السكان... الخ. كما يجب مراعاة أن تكون قيمها قابلة للمقارنة في الأزمنة المختلفة.

فبالنسبة للتقويم الزمني ، وبما أن أشهر السنة ليست كلها لها نفس العدد من الأيام فإن ذلك قد يدخل أثراً على سلسلة زمنية أخذت بياناتها على أساس شهري. مثلاً إذا كان المتغير حجم المبيعات الشهرية من سلعة ، فإن حجم مبيعات يناير قد يزيد عن حجم مبيعات فبراير لمجرد الاختلاف في عدد الأيام بالشهرين. في هذه الحالة يجب تعديل حجم المبيعات لتصبح على أساس فترة زمنية ثابتة الطول. ويتم ذلك بقسمة مجموع كل شهر بعدد أيامه وضرب الناتج في ٣٠,٤١٦٧ وهو متوسط عدد الأيام للشهر في السنة غير الكبيسة (٣٦٥ يوم). للسنة الكبيسة (٣٦٦ يوم) يتم الضرب في ٣٠,٥ .

من ناحية أخرى إذا كانت السلسلة عبارة عن قيم (القيمة هي السعر مضروباً في الكمية) بالجنيه ، وتهمنا التغيرات في الكميات ، فيجب تعديل السلسلة بقسمة القيم برقم قياسي مناسب للأسعار . وبما أن الرقم القياسي للبيانات السنوية مثلاً ، يعطى مقياساً للسعر في كل سنة مقارنة بالسعر في سنة أساس ثابتة ، فإن القسمة عليه تعمل على أن تكون البيانات على أساس سعر ثابت .

في متغيرات مثل حجم الناتج القومي قد تكون الزيادة مع الزمن مضللة كمؤشر للتطور الإقتصادى إذا لم نضع في الاعتبار التغير في حجم السكان. في مثل هذه الحالة ينبغي تعديل السلسلة ليكون الناتج للفرد الواحد وذلك بقسمة الناتج الكلي على حجم السكان الكلي.

وأخيراً من الضروري مراعاة أن تكـون البيانـات في الفـترات المختلفـة قابلـة للمقارنة بمعني أنها جمعت على نفس الأسس. فمثلاً في البيانات التى تم جمعهـا في فـترة طويلة قد نجد أن بعض التغير قد طرأ على التعريف أو طريقة العرض مثلاً. فقد تكون البيانات كانت تعطى في شكل مجموع ثم أصبحت تعطي في شكل متوسط.

خطه الكتاب   يتناول الباب الثاني طرق التجزئة مع التركيز على الطريقة التقليدية . ومادة هذا الباب لا تتطلب خلفيـة إحصـائية ويمكـن أن تـدرس مـع مـادة في مبـادئ الإحصاء أو مادة على مستوى البكالوريوس في السلاسل الزمنية.

الباب الثالث يتعرض بإيجاز للتحليل الطيفي الذي ينظر للسلسة الزمنية كنتاج لموجات جيب خفيه. ويعتبر التحليل الطيفي تحليلاً للسلسلة الزمنية في مجال التكرار.

أما الأبواب الرابع والخامس والسادس فيتنـاولان بعـض نمـاذج التنبـؤ الهامـة ويمثلان تحليلاً للسلسلة في مجال الزمن.

الباب الرابع تضمن طرق التمهيـد بينمـا يحـوى البابـان الخـامس والسـادس النمـاذج المستقرة والغير مستقرة بالترتيب.

وفي الباب السابع عرضاً موجزاً لنماذج أخرى ذات طبيعة خاصة مثـل نمـاذج الدالة التحويلية والسلاسل الزمنية المالية ، كما يتم التعرض لنظرية التحكم.

الباب الثاني

طرق التجزئة

٢,١ مقدمة

استخدمت طرق التجزئة (أو التفكيك) منذ فترة طويلة كأدوات لتحليل السلسلة الزمنية بهدف معرفة طبيعتها. وهي تنبثق جميعها من طريقة التجزئة التقليدية **the classical decomposition method** والتي يطلق عليها أحيانا أيضا أسم طريقة النسبة للمتوسط المتحرك **ratio-to-moving average** لأنها اكتسبت شهرة وشيوعاً بعد ظهور فكرة النسبة للمتوسط المتحرك في العشرينات من القرن العشرين رغم أن تطبيقها لا يتطلب بالضرورة استخدام هذه النسبة.

وتسعى طرق التجزئة لتحقيق ثلاثة أهداف عامة. الهدف الأول هو عزل أو قياس التغيرات المختلفة التي تؤثر على السلسلة الزمنية. ثانياً تعديل السلسلة الزمنية بإزالة التغيرات الموسمية (إن كانت) والطارئة بحيث يمكن تبين سلوك السلسلة في المدى البعيد بوضوح أكثر ودون أن تحجبه التغيرات الموسمية والعشوائية. أما الهدف الثالث لطرق التجزئة فهو تحسين التنبؤ بالقيم المستقبلية للسلسلة عن طريق وضع التغيرات الموسمية والدورية في الحسبان.

وفي هذا الباب سنتعرض بتفصيل لطريقة التجزئة التقليدية وباختصار لطرق التجزئة الأخرى. ذلك أن طريقة التجزئة التقليدية هي الأساس والطرق الأخرى مجرد محاولات لتحسين التقديرات فيها.

٢,٢ طريقة التجزئة التقليدية

تفترض هذه الطريقة أن قيم السلسلة الزمنية تكون عادة خاضعة لأربعة أنواع من التغيرات أو المكونات وهي التغيرات الناتجة عن الاتجاه العام ، التغيرات الموسمية ، التغيرات الدورية والتغيرات الغير منتظمة.

ونستعرض فيما يلي بإيجاز ما يعنيه كل من هذه المصطلحات:

٢,٢,١ الاتجاه العام (T) Secular trend

يقصد بالاتجاه العام السلوك العام للمتغير (الذي تمثله السلسلة) في المدى الطويل . والاتجاه العام للسلسلة قد يكون للأعلى أو للأسفل أو قد يكون أفقياً وقد يكون خطياً يمكن تمثيله بخط مستقيم أو غير خطى يمكن تمثيله بمنحنى. وتعنى الملاحظة الأخيرة أن الاتجاه العام قد يغير اتجاهه ، ولكن ذلك إن حدث يحدث بعد فترة طويلة ويبقي في الاتجاه الجديد لفترة طويلة كذلك. نرمز للاتجاه العام بالحرف " T ".

٢,٢,٢ التغيرات الموسمية (S) Seasonal variations

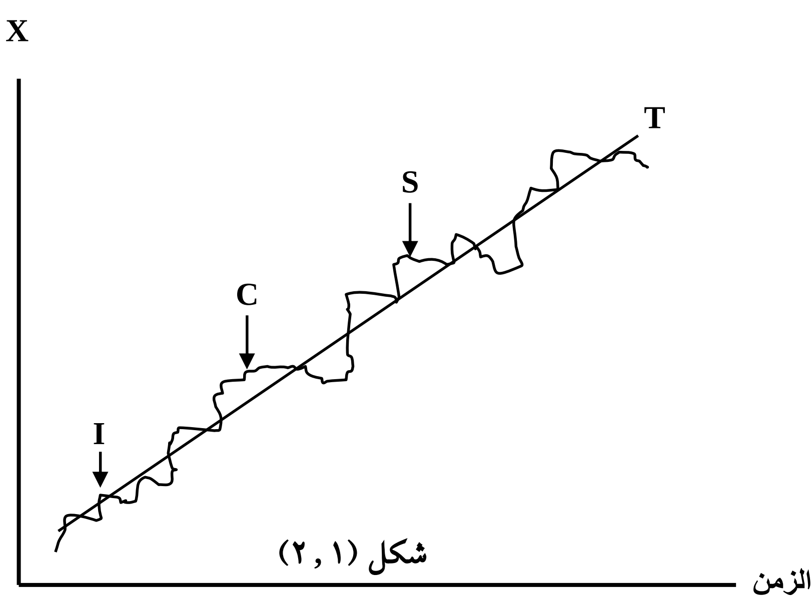
هذه تغيرات تكون في شكل زيادة أو نقصان تتكرر في فترات زمنية معينة بطول فترة تكرار ثابت. ومن أمثلة ذلك حجم المبيعات الشهرية لسلعة الثلج والتي تزيد في أشهر الصيف وتقل في أشهر الشتاء بفترة تكرار ١٢ أشهراً. والفترة الزمنية للتغيرات الموسمية أقل من سنة : شهر ، ربع سنة ، ... الخ. ونرمز للتغيرات الموسمية بالحرف " S ".

٢,٢,٣ التغيرات الدورية (C) Cyclical variations

كما هو الحال في التغيرات الموسمية ، تأخذ التغيرات الدورية شكل زيادة أو نقصان يتكرر مع الزمن. ولكنها تختلف عن التغيرات الموسمية في أن فترة التكرار طويلة (عادة عدة سنوات) وغير ثابتة. ومن أمثلة التغيرات الدورية الدورات التجارية **trade cycles** والتي تكون في شكل عدد من سنوات الكساد يليها عدد من سنوات الرخاء. نرمز للتغيرات الدورية بالحرف " C ".

٢,٢,٤ التغيرات غير المنتظمة (C) Irregular variations

ويقصد بها كل التغيرات الأخرى التي لا تنتمي للأنواع الثلاثة المذكورة أعلاه. وتؤثر على السلسلة الزمنية. وتنتج عادة عن أسباب طارئة غير معروفة وتظهر في رسم السلسلة في شكل تعرجات صغيرة. وسنرمز فيما يلي لهذا النوع من التغيرات بالحرف " I ".



رسم لسلسلة زمنية إفتراضية

يوضح شكل (١ , ٢) رسم لسلسلة زمنية افتراضية تحوي الأنواع الأربعة حيث يمثل الخط المستقيم (T) الاتجاه العام للسلسلة ، الموجة المتوسطة (S) التأثير الموسمي ، الموجة الكبيرة (C) التأثير الدوري والتعرجات الصغيرة (I) التغيرات غير المنتظمة.

٢,٢,٥ النموذج الضربى والنموذج الجمعى Multiplicative & additive models

التساؤل الذي يفرض نفسه في طريقه التجزئة هو التالي : إذا كانت القيم المشاهدة في السلسلة الزمنية هي نتاج لتأثير مصادر التغير I, C, S, T ، فكيف تؤثر هذه التغيرات عليها ؟ هناك تصوران أو نموذجان يعبران عن الكيفية التي توثر بها المصادر الأربعة على السلسلة الزمنية وهما النموذج الجمعى والنموذج الضربي .

إذا كانت Y_t القيمة في السلسلة الزمنية في الزمن t فإن النموذج الجمعى يفترض أن Y_t هى نتيجة لحاصل جمع آثار المصادر الأربعة في الزمن t ، أى

$$Y_t = T_t + S_t + C_t + I_t$$

حيث T_t، S_t، C_t و I_t هى آثار الاتجاه العام ، الأثر الموسمي ، الأثر الدوري والأثر العشوائي (غير المنتظم) في الزمن t بالترتيب. ووفق هذا النموذج فإن الآثار الموسمية ، الدورية وغير المنتظمة تمثل انحرافات كمية حول الاتجاه العام ، كما أنها مستقلة عن بعضها.

أما النموذج الضربي – وهو الأكثر استخداماً – فيعتقد فيه أن القيمة Y_t ناتجة عن حاصل ضرب الآثار المختلفة :

$$Y_t = T_t \times S_t \times C_t \times I_t$$

ونلاحظ لا حقاً أن المكونات الأربعة تعطى في النموذج الجمعى بالوحدات الأصلية بينما في الضربي يمثل الاتجاه العام فقط بالوحدات الأصلية. أما الثلاثة الأخرى فتكون في شكل نسبة.

ونتناول فيما يلي كيفية قياس التغيرات الناتجة عن الاتجاه العام ، التغيرات الموسمية والتغيرات الدورية ، مع ملاحظة أن التغيرات الدورية لا يمكن عادة قياسها بدقة لعدم انتظام فترة تكرارها ولأن قياسها يتطلب الماماً بالتغيرات الاقتصادية في المدى الطويل. أما التغيرات غير المنتظمة فلا يمكن قياسها ولكن يمكن فقط عزلها بعد قياس الآثار الأخرى. وسيتم التركيز في النقاش على النموذج الضربي لأنه الأكثر استخداماً كما ذكرنا ، ونشير في المواقع المناسبة لما ينبغي فعله إذا كان النموذج جمعياً.

من ناحية أخري تجدر الإشارة إلى أن طريقة التجزئة لا تقوم على نظرية إحصائية وإنما أساساً على الحدس والبداهة.

٢,٢,٦ قياس الاتجاه العام

هناك حالتان للاتجاه العام : اتجاه عام خطى واتجاه عام غير خطى .

٢,٢,٦,١ الاتجاه العام الخطى

إذا كان الاتجاه العام خطياً فإنه يمكن أن يمثل بالخط المستقيم

$$\hat{y} = a + bx$$

حيث $\hat{y}$ القيمة الاتجاهية (أى القيمة من خط الاتجاه العـام) المقابلـة للوحـدة الزمنية x. وإذا تم رسم خط الاتجاه العام فإن a سـتمثل الجـزء المقطـوع مـن المحـور الرأسى بينما تمثل b ميله .

وتتوفر عدة طرق لإيجاد خط الاتجاه العام لسلسلة زمنية وتحديـداً لإيجـاد قـيم a و b التى تحدد الخط تماماً. وتتباين هذه الطرق من حيث البساطة والدقـة. وسـنتعرض فيما يلي لأكثرها استخداماً وهي طريقة المربعات الصغرى.

أفرض أن Y و X متغيران يمثلان قيم السلسلة والوحدات الزمنية بالترتيـب وأن العلاقة بين قيمة السلسلة في الزمن t ، y_t والوحدة الزمنية x_t تأخذ الشكل

$$y_t = \alpha + \beta x_t + e_t \qquad t = 1,2,\ldots,n$$

حيث α و β ثوابت مجهولة و e_t متغير عشـوائي وسـطه الحسـابي صـفر وتباينه σ^2. هذا النموذج –أو التصور المبسط للواقع – يفترض فيه أن قيم السلسـلة الزمنية لها اتجاه عام يمثله خط مستقيم يقطع من المحور الرأسي مقدار α وله ميل β ، مع الاعتراف بأن القيمة الحقيقية المقابلة لأي x قد تنحرف عن القيمة من الخط بمقدار e والذي يمثل آثار التغيرات الأخرى.

وتقـوم طريقـة المربعـات الصـغرى علـى إيجـاد المقـدرات a و b ل α و β بالترتيب التي تصغر مجموع مربعات الخطأ

$$\sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \sum_{t=1}^{n} (y_t - \alpha - \beta x_t)^2$$

ولتحقيق ذلك تتم مفاضلة مجموع المربعات جزئياً مـرة بالنسـبة ل α ووضـع الناتج مساوياً للصفر ، ومرة بالنسبة ل β ووضع الناتج مساوياً للصفر.

يقود ذلك للمعادلات الطبيعية

$$na + b\sum_t x_t = \sum_t y_t$$

$$a\sum_t x_t + b\sum_t x_t^2 = \sum_t y_t x_t$$

وبحلها آنياً نحصل على المقدرات a و b و التي تأخذ الشكل :

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}$$

حيث $\bar{y}$ و $\bar{x}$ متوسط قيم y و x بالترتيب.

وبما أن x في السلسلة الزمنية تمثل فترات تبعد عن بعضها عادة بمسافات متساوية ، فيمكن تسهيل حل المعادلات والحسابات لاحقاً إذا استخدمنا ترميزاً مناسباً للزمن . ونظرياً أى متغير جديد تكون القيم فيه تبعد عن بعضها بمسافات متساوية يصلح لتمثيل متغير الزمن x . فمثلاً قد نضع القيمة الأولى ل x في السلسلة ٠ والتي تليها ١ ثم ٢ ... وهكذا ، أو نضع القيمة الثالثة ٠ والتى قبلها -1 ثم -2، والتى تليها ١ ثم ٢ ثم ٣ وهكذا . في كل هذه الترميزات لن تتأثر قيمة b ولكن قيمة a ستتأثر بنقطة الأصل أى الوحدة الزمنية الممثلة بصفر. لكن ما دمنا نعرف نقطة الأصل فلن يؤثر أى ترميز نستخدمه على القيمة الاتجاهية التى تحسب من معادلة الخط.

وما دمنا نبحث عن التبسيط ، فإننا نستخدم الترميز الذي يقود لأقل تعقيدات في الحساب. هذا الترميز هو الذي يكون بحيث يجعل مجموع قيم x صفراً. في هذه الحالة تكون المقدرات بالشكل البسيط.

$$a = \frac{\sum y}{n} \text{ و } b = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

وتختلف طريقة الترميز حسب ما إذا كان عدد قيم السلسلة n فردى أم زوجي كما توضح الأمثلة التالية.

مثال(٢,١)

جدول (١ , ٢) أدناه يوضح قيم سلسلة افتراضية تتكون من ٥ قيم وخطوات إيجاد معادلة خط الاتجاه العام لها.

(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)
السنة	y	x	x^2	xy
١٩٩٥	١	-٢	٤	-٢
١٩٩٦	٥	-١	١	-٥
١٩٩٧	٦	٠	٠	٠
١٩٩٨	٧	١	١	٧
١٩٩٩	٦	٢	٤	١٢
المجموع	٢٥	٠	١٠	١٢

جدول (١ , ٢)

قيم السلسلة الزمنية معطاة بالعمود (٢) . وبما أن عدد قيم السلسلة فردي فهناك سنة في الوسط . فإذا أردنا أن يكون مجموع قيم x صفر نضع ٠ مقابل السنة في الوسط ثم -1، -2،... للسنوات قبلها و 1، 2،... للتى بعدها.

لحساب a و b بطريقة المربعات الصغرى نحتاج لمعرفة n، $\sum y$، $\sum x^2$ و $\sum xy$. من الجدول نجد :

$$n = 5, \sum y = 25, \sum x^2 = 10, \sum xy = 12$$

إذن $$a = \frac{\sum y}{n} = \frac{25}{5} = 5 \quad , \quad b = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{12}{10} = 1.2$$

وتكون معادلة خط الاتجاه العام المقدرة هى بالتالي :

$$\hat{y} = 5 + 1.2x$$

(حيث نقطة الأصل منتصف سنة ١٩٩٧ ، الوحدة الزمنية سنة)

ومن الضروري إضافة العبارات بين القوسين ، لأنها توضح لمستخدم المعادلة السنة التي وضع أمامها الصفر وكيف تتزايد قيم x . هذه المعــلومات مطلوبـة إذا تـوفرت فقـط المعادلة (دون الجدول) ونريد استخدام المعادلة لإيجاد القيمة الاتجاهية لأى سنة . مثلاً لإيجـاد القيمـة الاتجاهيـه لسـنة ١٩٩٦ نعـوض في المعادلـة $x = -1$ لنحصـل علـى

$$\hat{y} = 5 + 1.2(-1) = 5 - 1.2 = 3.8$$

كذلك لإيجاد القيمة الاتجاهية لسنة ٢٠٠٠ نعوض $x = 3$ وهكذا . وما كنا لنسـتطيع معرفة قيم x ما لم نعرف نقطة الأصل.

مثال(٢,٢)

يوضح جدول (٢ , ٢) قيم لسلسلة زمنية عددها زوجي وخطوات الحل.

(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)
السنة	y	x	x^2	xy
١٩٩٥	١	-٥	٢٥	-٥
١٩٩٦	٥	-٣	٩	-١٥
١٩٩٧	٦	-١	١	-٦
١٩٩٨	٧	١	١	٧
١٩٩٩	٦	٣	٩	١٨
٢٠٠٠	٥	٥	٢٥	٢٥
المجموع	٢٥		٧٠	٢٤

جدول (٢ , ٢)

بما أنه لا توجد سنة في الوسط ، نأخذ كنقطة أصل منتصف الفترة بين السنتين اللتين في الوسط ، فإذا وضعنا -1 مقابل سنة ١٩٩٧ و $+1$ مقابل سنة ١٩٩٨ تكون الزيـادة في قيمة x بين كل سنتين متتاليتين 2 مما يعني أن الوحدة الزمنية التي قيسـت بهـا x نصف سنة . من الجدول نجد

$$n = 6, \sum y = 30, \sum x^2 = 70, \sum xy = 24$$

ومعادلة خط الاتجاه العام المقدرة :

$$\hat{y} = 5 + 0.34x$$

(حيث نقطة الأصل منتصف الفترة بين١٩٩٧و١٩٩٨ والوحدة الزمنية نصف سنة).

٢,٢,٦,٢ تحويل نقطة الأصل

قد تحسب معادلة خط الاتجاه العام على أساس نقطة أصل (مكان وضع الصفر في عمود x) معينة ، ولكننا نريد تحويلها لنقطة أخرى. هذا التحويل لن يؤثر على قيمة b أو على القيمة الاتجاهيه ولكنه يؤثر على قيمة a. إذ تزيد قيمة a بمقدار rb إذا حولنا نقطة الأصل r وحدة زمنية للأمام وستقل بمقدار rb إذا حولناها r وحدة للخلف.

ففي مثال (١ , ٢) إذا حولنا نقطة الأصل الي سنة ١٩٩٩ بدلاً عن ١٩٩٧ أى نقلناها $r = 2$ وحدة للأمام فإن قيمة a تصبح :

$$a = 5 + 2 \times 1.2 = 7.4$$

وبالتالي تكون المعادلة المقدرة على أساس نقطة الأصل الجديدة

$$\hat{y} = 7.4 + 1.2x$$

(حيث نقطة الأصل ١٩٩٩ والوحدة الزمنية سنة)

لاحظ أن القيم الاتجاهيه لن تتغير رغم تغير المعادلة لأن التغير الذي سيحدث في قيم x نتيجة لتحويل نقطة الأصل سيعمل على إلغاء تأثير التغيير في قيمة a . فمثلاً بما أن قيمة x المقابلة لسنة ١٩٩٦ بعد وضع الصفر أمام ١٩٩٩ ستكون -3 (بدلاً عن -1) فإن القيمة الاتجاهيه لسنة ١٩٩٦ تكون

$$\hat{y} = 7.4 + 1.2 \times (-3) = 3.8$$

وهي نفس القيمة الاتجاهيه التي حصلنا عليها من المعادلة قبل التحويل.

٢,٢,٦,٣ تحويل الوحدة الزمنية ووحدة قياس البيانات

أحياناً نحصل على معادلة اتجاه عام بالشكل

$$y_t = a + bx$$

حيث الوحدة الزمنية التي تمثلها x والوحدة الزمنية التي قيست بها y_t وحدات معينه ونريد أن نحصل من هذه المعادلة على معادلة تتيح لنا إيجاد القيم الإتجاهيه بوحدات أخري. مثلاً الوحدة الزمنية قد تكون سنة والبيانات سنوية ونريد استخدام المعادلة لإيجاد القيم الإتجاهيه على أساس شهري. في هذه الحالة نستخدم معادلة التحويل :

$$y_{tm} = a_m + b_m x_m + A$$

حيث $a_m = \frac{a}{n}$ ، $b_m = \frac{b}{nn_x}$ ، $x_m = n_x x$ ، وحيث n_x تساوى n أو $\frac{n}{2}$.

كذلك :

n_x : عدد الوحدات الجديدة في الوحدة الزمنية التي تمثلها x في المعادلة الأصلية. مثلاً إذا كانت البيانات سنوية وعددها فردي فإن الوحدة الزمنية ل x تكون سنة وإذا أردنا تحويل المعادلة لشهرية فإن عدد الوحدات الجديدة (الشهور) يكون $n_x = 12$. أما إذا كان عدد السنوات زوجي فإن الوحدة الزمنية تكون نصف سنة وفي هذه الحالة فإن $n_x = 6$.

n : عدد الوحدات الجديدة في الوحدات التي قيست بها البيانات. مثلاً إذا كانت البيانات سنوية ونريد التحويل لشهرية فإن $n = 12$ وإذا كانت شهرية ونرغب في التحويل لسنوية تكون $n = \frac{1}{12}$ وهكذا.

A : تعديل مقداره $\frac{1}{2} b_m$ يضاف عند الحاجة لجعل السلسلة تتمركز في منتصف الوحدة الوسطى الجديدة .

مثال (٢,٣)

المعادلة التالية قدرت من سلسلة زمنية امتدت للفترة ١٩٩٠ إلى ٢٠٠٤ .

$$y_t = 2 + 0.1x$$

(نقطة الأصل منتصف سنة ١٩٩٧ الوحدة الزمنية سنة واحدة ، مبيعات سنوية)

المطلوب تعديل هذه المعادلة ليمكن استخدامها لإيجاد القيم الاتجاهية على أساس شهري.

<u>الحل</u>

بما أن الوحدة الزمنية ل x في المعادلة سنة وبما أن الوحدة الجديدة التى نرغب في التحويل إليها شهر وفي السنة ١٢ شهراً إذن عدد الوحدات الجديدة في الوحدة القديمة $n_x = 12$.

كذلك بما أن المبيعات سنوية فإن $n = 12$ أيضاً.

هل نحتاج للتعديل A ؟ نقطة الأصل في المعادلة الأصلية هى منتصف ١٩٩٧ أى بين نهاية يونيو وبداية يوليو وبما أن الوحدة الجديدة شهر نجعل مركز الأصل منتصف شهر يوليو. ولتحقيق ذلك يجب إضافة $A = \frac{1}{2}b_m$. لاحظ أن b_m هي معدل التغير الشهري.

الآن : $a_m = \frac{a}{n} = \frac{2}{12} = 0.17$

$$b_m = \frac{b}{nn_x} = \frac{0.1}{12 \times 12} = 0.0007$$

$$A = \frac{1}{2}b_m = 0.00035$$

وبالتالي تكون المعادلة الجديدة

$$y_{tm} = 0.17 + 0.0007x_m + 0.00035$$
$$= 0.17035 + 0.0007x_m$$

(نقطة الأصل منتصف يوليو ١٩٩٧ ، الوحدة الزمنية شهر ، المبيعات شهرية).

مثال (٢,٤)

في المثال السابق عدِّل المعادلة بحيث يمكن إيجاد القيم الاتجاهية على أساس ربع السنة.

<u>الحل:</u>

في هذه الحالة $n = n_x = 4$

المركز الأصلي منتصف الفترة بين الربع الثاني والثالث لسنة ١٩٩٧ ، ولجعله منتصف الربع الثالث من سنة ١٩٩٧ نضيف **A** لتصبح المعادلة :

$$y_{tm} = \frac{2}{4} + \frac{0.1}{4 \times 4} x_m + \frac{0.1}{2 \times 4 \times 4}$$
$$= .0503 + 0.006 x_m$$

(حيث نقطة الأصل الربع الثالث سنة ١٩٩٧ ، الوحدة الزمنية ربع سنة ، المبيعات ربع سنوية).

<u>مثال (٢,٥)</u>

للمثال (٢,٣) عدل المعادلة ليمكن استخدامها لإيجاد القيم الاتجاهية بفترات خمسه سنوات .

<u>الحل:</u>

الوحدة الزمنية الأصلية سنة والجديدة ٥ سنوات. إذن $n_x = \frac{1}{5}$ كذلك $n = \frac{1}{5}$.

مركز الأصل في المعادلة الأصلية منتصف الفترة ١٩٩٠ إلي ٢٠٠٤ أى عام ١٩٩٧.

هذا المركز هو نفسه منتصف السنوات الخمس التي في الوسط. إذن لا نحتاج لإضافة **A** لتصبح المعادلة الجديدة

$$y_{tm} = \frac{2}{\frac{1}{5}} + \frac{0.1}{\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}} x_m$$
$$= 10 + 2.5 x_m$$

(حيث نقطة الأصل ١٩٩٧ الوحدة الزمنية ٥ سنوات ، المبيعات لـ ٥ سنوات)

٢,٢,٦,٤ الاتجاه العام غير الخطى :

قد يكون الاتجاه العام غير خطى . في هذه الحالة لا نستطيع استخدام معادلة خط مستقيم لتمثيله. وإذا كان الاتجاه العام للسلسلة الزمنية يتبع نمطاً يمكن تمثيله بمعادلة منحني معروف (مثلاً المنحنى الأسى) ، فيمكن تقدير المعادلة باستخدام طريقة المربعات الصغرى أو أي طريقة أخرى مناسبة ثم استخدام المعادلة المقدرة لحساب القيم الاتجاهية . ولكن في معظم السلاسل الزمنية التي تواجهنا في الواقع يكون الاتجاه العام متقلباً بحيث يصعب إيجاد معادلة تمثل نمطه. في مثل هذه الحالة نلجأ عادة لطرق التمهيد **smoothing methods** وتهدف هذه الطرق بصفه عامة لإزالة التعرجات الناتجة عن التغيرات الموسمية والعشوائية بحيث يبقى فقط الاتجاه العام والتغيرات الدورية طويلة الأمد (أن وجدت). وأهم طرق التمهيد المستخدمة في السلاسل الزمنية هي طريقة المتوسطات المتحركة **moving averages** .

وتقوم فكرة المتوسط المتحرك على أخذ أول r قيمة في السلسلة الزمنية (تسمى r رتبه المتوسط المتحرك) وحساب متوسطها ، ثم حذف القيمة الأولى و إضافة القيمة رقم $r+1$ وحساب متوسط ال r قيمة الجديدة ، وهكذا نحذف أول قيمة استخدمت في حساب آخر متوسط متحرك ونضيف القيمة التالية لقيمة لنحسب متوسط جديد ، ونحن نتجه لأسفل السلسلة الزمنية ليتكون لدينا نتيجة لذلك متوسط متحرك.

وبما أن حساب المتوسط المتحرك يتطلب أخذ مجموع عدد من قيم السلسة الزمنية ، وبما أنه في المجموع نستبدل القيم المختلفة برقم واحد ، فإن قيم المتوسط المتحرك ، إذا نظرنا لها كسلسلة زمنية ، تكون أقل اختلافاً عن بعضها من قيم السلسلة الأصلية. أى أنها أكثر تمهيداً. وفي الواقع كلما زادت رتبه المتوسط المتحرك (أى عدد القيم فيه)، كلما كان التمهيد أكبر. ولكن ذلك يكون على حساب عدد المتوسطات المتحركة والذي سيكون أقل . ويرمز للمتوسط المتحرك ذو الرتبة r ب **MA(r)** .

من ناحية أخري إذا كانت السلسلة الزمنـية خاضعة لتغيرات موسمية بطول فترة تكرار k يجب استخدام متوسط متحرك برتبه k لضمان القضاء على هذه التغيرات.

ويختلف حساب المتوسط المتحرك في حالة r عـدد فـردي عنـه في حالـه عـدد زوجي كما يتضح من مثال (٦ , ٢) ومثال (٧ , ٢) أدناه.

مثال (٦ , ٢)

جدول (٣ , ٢) يوضح قيم سلسلة زمنية والحسابات المطلوبـة لإيجـاد متوسـط متحرك برتبه ٣.

(٤)	(٣)	(٢)	(١)
متوسط متحرك	مجموع متحرك	y	السنة
—	—	١	١٩٩٥
٤	١٢	٥	١٩٩٦
٦	١٨	٦	١٩٩٧
٦,١	١٩	٧	١٩٩٨
٧	٢١	٦	١٩٩٩
٨	٢٤	٨	٢٠٠٠
٨,٧	٢٦	١٠	٢٠٠١
١٠	٣٠	٨	٢٠٠٢
—	—	١٢	٢٠٠٣

جدول (٣ , ٢)

المجاميع المتحركة حسبت كما يلي : القيمة الأولي ١٢ هي مجموع الثلاث قـيم الأولى في السلسلة الزمنية. وقد وضع هذا المجموع مقابل القيمة الوسطى أى أمام سـنة ١٩٩٦. القيمة الثانية ١٨ تم الحصول عليها بطرح القيمة الأولى وهـى ١ مـن المجمـوع الأول (١٢) وإضافة القيمة التالية (أى الرابعة) إليـه. ووضـع المجمـوع أمـام القيمـة

الوسطى أى أمام سنة ١٩٩٧. وهكذا لبقية المجاميع . أما العمود (٤) فيعطى قيم المتوسط المتحرك والتي نحصل عليها بقسمة كل مجموع متحرك على عدد القيم فيه وهو ٣.

مثال (٢,٧)

جدول (٤ , ٢) الحسابات المطلوبة لحساب متوسط متحرك برتبه ٤ للسلسلة الزمنية بمثال (٦ , ٢).

(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)
السنة	y	مجموع متحرك	مجموع مجموعين	متوسط متحرك ممركز
١٩٩٥	١	—	–	–
١٩٩٦	٥	—	–	–
١٩٩٧	٦	١٩ ٢٤	٤٣	٥,٣
١٩٩٨	٧	٢٧	٥١	٦,٣
١٩٩٩	٦	٣١	٥٨	٧,٢
٢٠٠٠	٨	٣٢	٦٣	٧,٨
٢٠٠١	١٠	٣٨	٧٠	٨,٧
٢٠٠٢	٨	—	–	–
٢٠٠٣	١٢		–	–

جدول (٤ , ٢)

ويحسب المجموع المتحرك بالعمود (٣) بنفس الطريقة المستخدمة في مثال (٦ , ٢) مع مراعاة أن عدد القيم فيه يكون الآن ٤ . ولكن بما أن القيم في المجموع عددها زوجي فليست هنالك قيمة وسطى نضع أمامها المجموع. لهذا يوضع المجموع بين القيمتين اللتين في الوسط. فبالنسبة للمجموع الأول مثلاً يوضع بين سنة ١٩٩٦ و١٩٩٧. وبما أنه يجب أن يكون كل مجموع أمام سنة ، نحقق ذلك بأخذ مجموع كل

مجموعتين متجاورين ونضعه بينهما ليقابل بذلك السنة المحصورة بينهما. بعد ذلك يتم الحصول على المتوسط المتحرك بقسمة كل مجموع مجموعتي على العدد الكلى للقيم فيهما وهو ٨ . يسمى المتوسط المتحرك في هذه الحالة متوسط متحرك ممركز centered moving averages.ونلاحظ من جدول (٣, ٢) وجدول (٤, ٢) أن قيم المتوسط المتحرك ذو الرتبة ٤ أكثر قرباً لبعضها من قيم المتوسط المتحرك برتبة ٣ ولكن عددها أقل. المتوسط المتحرك MA(r) يوصف بأنه متوسط متحرك مفرد single moving average تمييزاً له من المتوسط المزدوج MA(r x m) double moving average والذي يعنى حساب متوسط متحرك برتبة r على سلسلة تتكون من قيم متوسط متحرك برتبة m. أى هو متوسط متحرك لمتوسط متحرك. وقد وجد أن مثل هذا المتوسط يساعد في تمهيد السلاسل الزمنية التى تحوى اتجاهاً عاماً يؤدي لظهور خطأ منتظم عند تطبيق متوسط متحرك مفرد عليها . كذلك يمكن التعميم لرتب أعلى فستخدم متوسط متحرك MA(rxmxs) مثلاً ، والذي يعنى متوسط متحرك برتبة r لمتوسط برتبة m لمتوسط متحرك برتبة s.

٢,٢,٧ قياس التغيرات الموسمية : كلمة موسم هنا تحمل معني أشمل من المعني الذي يستخدم في الحياة العادية والمرتبط بالطقس. إذ تستخدم لتشير للوحدة الزمنية في السلسلة الزمنية بشرط أن تكون أقل من سنة . فالموسم قد يكون شهر إذا كانت البيانات شهرية أو ربع سنة إذا كانت معطاة بربع السنة وهكذا.

ورغم توفر عدة طرق أيضاً لقياس التغيرات الموسمية إلا أننا سنتناول طريقة النسبة للمتوسط المتحرك ratio- to- moving average والتي تعتبر بصفة عامة الأشهر والأكثر استخداماً. والخطوات في هذه الطريقة التي تستند إلى النموذج الضربي كما يلي :

١. إذا كانت فترة التكرار الموسمي k ، نحسب متوسط متحرك برتبة k . هذا الإجراء يجعل المتوسط المتحرك خالياً من التأثير الموسمي ولدرجة كبيرة من التأثير غير المنتظم ، وبالتالي يمكن اعتباره تقديراً ل $T \times C$ (الاتجاه العام والتأثير الدوري).

٢. تقسم كل قيمة للظاهرة y على قيمة المتوسط المتحرك المقابلة لها(أن وجدت) و يضرب الناتج في ١٠٠ لنحصل على ما يسمي بالنسبة للمتوسط المتحرك. وبما أنه في النموذج الضربي يفترض أن $Y = T \times C \times S \times I$ فـإن القسـمة علـي $T \times C$ تعطـي تقديراً ل $S \times I$ أي للتغيرات الموسمية والعشوائية.

٣. لكل موسم نوجد متوسط النسب للمتوسط المتحرك الخاصة به *، وذلـك للقضـاء على التغيرات غير المنتظمة والحصول على قيمة S لذلك الموسم. تسمى قيمة S الدليل الموسمي **seasonal index** أو العامل الموسمي **seasonal factor**. ونلاحـظ في هذه الخطوة ما يلي :

(i) بما أن النسب مئوية فإن مجموع المتوسطات للمواسـم ولـيكن عـددها m يجـب أن يساوي ١٠٠m. فمثلاً إذا كانت البيانات شهرية فهنـاك ١٢ موسـم (شـهر) وبالتـالي يكون مجموع المتوسطات ١٢٠٠. لكن بسبب التقريب في الحساب قد لا يساوي مجموع المتوسطات ١٠٠m. في هذه الحالة يجـب تعديلـها بقسـمة كـل متوسـط علـى مجمـوع المتوسطات الفعلي والضرب في ١٠٠m .

(ii) قد يكون في النسب الخاصة بموسم ما قيماً شاذة ، في هذه الحالة يفضل اسـتخدام متوسط لا يتأثر بالقيم الشاذة مثل الوسيط. أو استخدام متوسط حسابي مبتور تحـذف فيه القيمة المتطرفة. لكن في هذه الحالة يجب حذف قيمة من الطرف المقابل قبل حساب المتوسط للحفاظ على التماثل.

مثال (٢,٨)

لتوضيح طريقة النسبة للمتوسط المتحرك نستخدم سلسـلة زمنيـة تمثـل عـدد أزواج الزلاجات المائية التي باعها محل أدوات رياضية بمنطقـة سـياحية سـاحلية في الفـترة ١٩٧٩-١٩٨٣ (جدول (٥ , ٢)).

* مثلاً متوسط نسب ينـاير ، متوسط نسب فبراير .إذا كانت البيانـات شـهريـة. أو متوسط نسب يوم السبت ، متوسط نسب يوم الأحد ... إذا كانت يومية .

جدول ٢,٥

(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٦)	(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٦)
الشهر	Y	مجموع متحرك	مجموع مجموعين	متوسط متحرك ممركز	النسبة للمتوسط المتحرك	الشهر	Y	مجموع متحرك	مجموع مجموعين	متوسط متحرك ممركز	النسبة للمتوسط المتحرك
J	٠					A	٤		٣١٢	١٣,٠	٣٠,٨
F	٢					S	٧		٣٢٤	١٣.٥	٥١,٩
M	١٠					O	٤		٣٥٣	١٤,٧	٢٧,٢
A	٤					N	٠		٤٤٨	١٨,٧	٠
Ma	٨٩					D	٢	١٥	٥١٤	٢١,٤	٩,٣
J	٣٣					J	١٣	٧	٤٩٧	٢٠,٧	٦٢,٨
Ju	١١	١٩٢	٣٨٧	١٦,١	٦٨	F	٤	١٦	٤٩٧	٢٠,٧	١٩,٢
A	٤		٣٨٨	١٦,٢	٢٤,٧	M	٥٦	٧	٥٠٣	٢٠,٩	٢٦٧,٩
S	١٧	١٩٥	٣٨١	١٥,٩	١٠٧,٠	A	٣٠	١٨ ٦	٥٠٣	٢٠,٩	١٤٣,٥
O	٥		٣٧٦	١٥,٧	٣١,٨	Ma	٩٠	٢+	٥٠٥	٢١,١	٤٢٦,٥
N	١٧	١٩٣	٣٠١	١٢,٥	١٣,٦	J	٢٠	٢	٥١١	٢١,٣	٩٤,٨
D	٠		٢١٦	٩,٠	٠	Ju	١٥	٢٥	٥٠٧	٢١,١	٧١,١
J	٣	١٨٨	٢٠٢	٨,٤	٣٥,٧	A	١١	٢	٥٠٦	٢١,١	٥٢,١
F	٠		٢٠٥	٨,٥	٠	S	٦	٢٤	٤٦٤	١٩,٣	٣١,١
M	٥	١٨٨	٢٠٦	٨,٦	٥٨,١	O	٥	٥ ٢٥	٣٩٤	١٦,٤	٣٠,٥
A	٤		١٩٩	٨,٣	٤٨,٢	N	١	٢	٣٠١	١٢,٥	٨.٠
Ma	١٤	١١٣	١٨٥	٧,٧	١٨١,٨	D	٧	٢٥	٢٤٠	١٠,٠	٧٠,٠
J	٢٣		١٨٠	٧,٥	٣٠٦,٧	J	٤	١	٢٦١	١٠,٩	٣٦,٧
Ju	٧	١٠٣	١٩٤	٨,١	٨٦,٤	F	١٢	٢٥	٢٦٨	١١,٢	١٠٧,١
A	١١	٩٩	٢٠٢	٨,٤	١٣٠,٩	M	٦	٢	٢٧٠	١١,٢	٥٣,٦
S	١١		٢٤٥	١٠,٢	١٠٧,٨	A	١٠	٢٥ ٣	٢٧٤	١١,٤	٨٧,٧
O	٤	١٠٦	٢٩٣	١٢,٢	٣٢,٨	Ma	١٧	٢٥	٢٩٠	١٢,١	١٤٠,٥
N	٤		٣٠٠	١٢,٥	٣٢,٠	J	٣٢	٨	٣٠٠	١٢,٥	٢٥٦,٠
D	٨	١٠٠	٣٠٧	١٢,٨	٦٢,٥	Ju	٢٤	٢٤			
J	٩	٩٩	٣٢٩	١٣,٧	٦٥,٧	A	٩	٩			
F	٢	٨٦	٣٣٧	١٤,٠	١٤,٣	S	١٠	[illegible]			
M	٤٦	٩٤	٣٢٦	١٣,٦	٣٣٨,٢	O	٥				
A	١١		٣٢٢	١٣,٤	٨٢,١	N	١٧				
Ma	١٤	١٠٠	٣١٨	١٣,٣	١٠٥,٣	D	١				
J	٣٠		٣٠٨	١٢,٨	٢٤٣,٤						
Ju	٢٢		٣٠٦	١٢,٨	١٧١,٩						

بما أن البيانات شهرية وكل موسم (شهر) يتكرر كل ١٢ شهراً فإن المتوسط المتحرك يجب أن يكون برتبة ١٢. كـذلك، وبما أن رتبة المتوسط المتحرك عدد زوجي فإن قيمة المجموع المتحرك توضع بين القيمتين اللتين في الوسط. فمثلاً للقيم ال١٢ الأولى يوضـع المجمـوع (١٩٢) بـين القيمة السادسة والسابعة (عمود "٣")، ولمجمـوعة القيم التي تبدأ بالقيمة الثانية وتنتهي بالقيمة رقم ١٣ يوضع المجموع (١٩٥) بين القيمة السابعة والثامنة وهكذا. أما المجموع المركز أو مجموع كل مجموعين متجاورين فيوضع بينهما. فمثلاً مجموع المجموعين الأولين ١٩٢ و١٩٥ قد وضع بينهما ليقابل بذلك شهر يوليو. ونحصل على المتوسط المركز (عمود "٥") بقسمة كل مجمـوع مجمـوعين على عدد القيم فيه وهو ٢٤. أما النسبة للمتوسط المتحرك (العمود الأخير) فهي عبارة عن قسمة كل قيمة فعلية بالسلسلة على المتوسط المركز المقابـل وضـرب النـاتج في ١٠٠. إذا لم تكن هناك آثاراً غير منتظمة أو لا يتغير التأثير الموسمي نفسه مع الزمن فإن النسـب الخاصـة بكل شهر كان ستكون متساوية. لهذا وللقضاء على التغيرات غير المنتظمة والحصول على رقم واحد يمثل التأثير الموسمي نحسب متوسط النسب الخاصة بكـل شـهر. يوضـح جـدول (٦ , ٢) الحسـابات المطلوبة بعد عزل قيم كل شهر.

	١٩٧٩	١٩٨٠	١٩٨١	١٩٨٢	١٩٨٣		١١٣٥,١	١١٩٩
J		٣٥,٧	٦٥,٧	٦٢,٨	٣٦,٧	٢٠٠,٩	٥٠,٢	٥٣,١
F		٠	١٤,٣	١٩,٢	١٠٧,١	١٤٠,٦	٣٥,٢	٣٧,٢
M		٥٨,١	٣٣٨,٢	٢٦٧,٩	٥٣,٦	٧١٧,٨	١٧٩,٤	١٨٩,٦
A		٤٨,١	٨٢,١	١٤٣,٥	٨٧,٧	٣٦١,٥	٩٠,٣	٩٥,٤
Ma		٤٨,٢	١٠٥,٣	٤٢٦,٥	١٤٠,٥	٨٥٤,١	٢١٣,٥	٢٢٥,٧
J		١٨١,٨	٢٣٤,٤	٩٤,٨	٢٥٦,٠	٨٩١,٩	٢٢٢,٩	٢٣٤,٩
Ju	٦٨	٨٦,٤	١٧١,٩	٧١,١		٣٩٧,٤	٩٩,٤	١٠٥,١
A	٢٤,٧	١٣٠,٩	٣٠,٨	٥٢,١		٢٣٨,٥	٥٩,٦	٦٣,٠
S	١٠٧,٠	١٠٧,٨	٥١,٩	٣١,١		٢٩٧,٨	٧٤,٥	٧٨,٧
O	٣١,٨	٣٢,٨	٢٧,٢	٣٠,٥		١٢٢,٣	٣٠,٦	٣٢,٣
N	١٣٦	٣٢,٠	٠	٨,٠		١٧٦,٠	٤٤,٠	٤٦,٥
D	٠	٦٢,٥	٩,٣	٧٠,٠		١٤١,٨	٣٥,٤٥	٣٧,٥
المجموع						المجموع	المتوسط	المتوسط المعدل(الدليل الموسمي)

جدول (٦ , ٢)

وفي جدول (٦ , ٢) تم حساب المتوسط لكل شهر في الصف قبل الأخير. وبما أن بعض الشهور بها قيماً شاذة فإن الوسط الحسابي ليس هو المتوسط المناسب ولكن تم حساب الوسط الحسابي للتبسيط . أما الصف الأخير فيعطي متوسطات معدلة ليصبح مجموعها ١٢٠٠. ويمثل كل متوسط معدل ما يسمي بالدليل الموسمي **seasonal index** أو العامل الموسمي **seasonal factor** كما ذكرنا. ويعبر الدليل الموسمي لأي شهر عن الأثر الموسمي له لأنه يعطى قيمة الظاهره الحقيقة في الشهر كنسبة مئوية من القيمة في الشهر المتوسط (أي الذي ليس به تأثير موسمي). فمثلاً القيمة ١٠٥,١ في شهر يوليو تعني أن المبيعات في ذلك الشهر تزيد بمقدار ٥,١٪ عنها في الشهر المتوسط بينما القيمة ٣٧,٥٪ في ديسمبر تعني أن المبيعات في ديسمبر تقل بمقدار ٦٢,٥٪ عن الشهر المتوسط.

١,٧,٢,٢ استخدامات الدليل الموسمي :

يستخدم الدليل الموسمي بعد حسابه لتحقيق أهداف متعددة :

١. التعرف على تأثير كل شهر على قيمة الظاهرة

فمثلاً إذا وجدنا أن الدليل الموسمي لشهر ١٥٠٪ نعرف أن تأثير ذلك الشهر على قيمة الظاهرة بحيث يزيدها بمقدار ٥٠,٪

٢. تخليص السلسلة الزمنية من التأثير الموسمي

من التطبيقات الهامة للدليل الموسمي استخدامه لتخليص السلسلة من التأثير الموسمي حتى يمكن إبراز الاتجاه العام (والتغير الدوري أن وجد بها) بصورة أوضح. مثلاً قد ترغب شركة طيران في معرفة النمط المستقبلي لعدد الركاب في أحد خطوطها دون أن تشوش على ذلك التغيرات الموسمية.

وتحسب القيمة الخالية من التأثير الموسمي لأي موسم (شهر مثلاً) بالقاعدة:

$$\text{القيمة الخالية من التأثير الموسمي} = \frac{\text{القيمة المشاهدة للموسم}}{\text{الدليل الموسمي للموسم}} [\times 100]$$

ففي مثال (٢,٨) القيمة الخالية من التأثير الموسمي لشهر فبراير في السنة الأولي مثلاً :

$$\frac{2}{37.2}\times 100 = 5.37$$

ويعني ذلك أن القيمة الفعلية لشهر فبراير من السنة الأولى وهى ٢ قد انخفضت بسبب التأثير الموسمي لفبراير والذي يخفض قيمة الظاهرة بمقدار ٦٢,٨٪ فبعد إزالته منها ارتفعت إلي ,٥,٣٧

٣. تحسين التنبؤ.

إن معرفتنا لتأثير موسم يمكن الاستفادة منها في تحسين التنبؤ بأي قيمة خاضعة لتأثير ذلك الموسم. ففي مثال (٢,٨) معادلة خط الاتجاه العام للسلة المقدرة بطريقة المربعات الصغرى نأخذ الشكل :

$$\hat{y} = 14.033 + 0.007x$$

(حيث نقطة الأصل منتصف الفترة بين شهرى يونيو ويوليو من عام ١٩٨١ والوحدة الزمنية نصف شهر)

فإذا أردنا التنبؤ بالمبيعات في يناير ١٩٨٤ باستخدام معادلة خط الاتجاه العام فقط نعوض $x = 61$ لنجد

$$\hat{y} = 14.033 + 0.007\times 61 = 14.46$$

هذا هو التنبؤ إذا لم يكن هناك تأثير موسمي لشهر يناير. ولكننا نعلم من جدول (٢,٦) أن تأثير ذلك الشهر هو ٥٣٪ من الشهر المتوسط. أي أنه إذا كان تأثير الشهر المتوسط ١٠٠ فإن تأثير يناير يكون ٥٣٪ مما يعنى أنه يخفض قيمة الظاهرة. لهذا نستفيد من هذه المعلومة في الحصول على تنبؤ أفضل وأقرب للواقع بضرب القيمة الاتجاهية في الدليل الموسمي ليناير والقسمة على ١٠٠ :

القيمة التنبؤية لشهر يناير ١٩٨٤ = $\frac{14.46\times 53.1}{100} = 7.67$

وهى قيمة تضع في الاعتبار ما يحدثه الأثر الموسمي من تغيير.

٢,٢,٧,١ حالة النموذج الجمعى:

إذا كان النموذج المفترض نموذجاً جمعياً فإن الخطوات التي استخدمت في طريقة النسبة للمتوسط المتحرك تظل كما هى باستثناء أنه في الخطوة (٢) تستبدل القسمة بالطرح ، فنطرح المتوسط المتحرك من القيمة الفعلية Y : ونستمر في بقية الخطوات كما في حالة النموذج الضربى. ونلاحظ هنا أن الدليل الموسمي يعطى بالوحدات الأصلية وليس في شكل نسبة مئوية.

وفي حالة تخليص أي قيمة فى السلسلة من التأثير الموسمي نطرح الأثر الموسمي من القيمة الفعلية. كذلك للتنبؤ نضيف الأثر الموسمي للقيمة الاتجاهيه.

٢,٢,٧,٢ استخدام الحزم الإحصائية:

تتوفر خدمة تنفيذ حساب الدليل الموسمي في معظم الحزم الإحصائية. ففي حزمة **SPSS** (الإصدار ١٧) يتم تنفيذ حساب الدليل الموسمي بإتباع الخطوات التالية :

١. ندخل البيانات الخاصة بالسلسلة كمتغير بالعمود الأول من صفحة البيانات.

٢. من شريط الخدمة (أعلى النافذة) نؤشر على **Data** ونختار **Define Dates** يعرض علينا ذلك عدة خيارات عن الوحدات الزمنية المستخدمة مثلاً **Years / Months** ، **Years / Quarters**... الخ فإذا كانت بياناتنا شهرية لعدد من السنوات مثلاً نختار **Years / Months**.

هذه الخطوة ضرورية ولا يتم تنفيذ طريقة التجزئة إلا بها.

٣. من شريط الخدمة نختار **Analyze** ثم **Time Series** (أو **Forecasting**) ثم نؤشر على **seasonal decomposition**.

٤. في النافذة التي تفتح بعد الخطوة الأخيرة ينقل المتغير الذي يمثل السلسلة للمربع الأول.

٥. نختار نوع النموذج : ضربي أو جمعي ثم نؤشر على **OK**.

يكون المخرج في شكل جدول يعطى المواسم (الشهور مثلاً) والدليل الموسمي لكل منها.

٦. إذا تم التأشير على **Display casewise listing** تظهر في نافذة البيانات أيضاً تقادير ل $T \times C$ و I إضافة للسلسلة خالية من التأثير الموسمي.

٢,٢,٨ قياس التغيرات الدورية: التغيرات الدورية ليست منتظمة لهذا لا نستطيع التنبؤ بها أو قياسها بدقة. وفي السلاسل الزمنية الاقتصادية يتطلب قياس التغيرات الدورية معرفة بالوضع الاقتصادي. وعند محاولة قياس التغيرات الدورية تواجهنا حالتان : حالة البيانات السنوية وحالة البيانات الشهرية.

٢,٢,٨,١ البيانات السنوية : إذا كانت البيانات سنوية فإنها تكون أصلاً خالية من التأثيرات الموسمية لأن كل المواسم ممثله في المجموع السنوي ، كما أن تأثير التغيرات غير المنتظمة يكون ضئيلاً. لهذا تكون $Y = T \times C$ إذا كان النموذج ضربياً و $Y = T + C$ إذا كان جمعياً. لهذا كل الذي نحتاجه في حالة النموذج الضربي قسمة Y على T والضرب في ١٠٠ لنحصل على ما يسمي المنسوب الدوري **cyclical relative** ونحصل على T بطريقة المربعات الصغرى أو المتوسطات المتحركة. أي أن T قيمة اتجاهيه أو متوسط متحرك. في حالة النموذج الجمعي نطرح T من Y لنحصل على الأثر الدوري.

مثال (٢,٩) الجدول أدناه يعطي القيم الفعلية والقيم الاتجاهية المتحصل عليها بطريقة المربعات الصغرى للسنوات الأربع الأولى لسلسلة زمنية.

السنة	Y	T	المنسوب الدوري
١٩٧٠	٥٣	٤٢,٩	١٢٣,٥
١٩٧١	٣٧	٣٩,١	٩٤,٦
١٩٧٢	١٣	٣٥,٣	٣٦,٨
١٩٧٣	٥٦	٣١,٥	١٧٧,٨

جدول (٢,٧)

القيم في العمود الأخير نحصل عليها بقسمة قيمة Y على قيمة T المقابلة والضرب في ١٠٠ وتمثل المنسوب الدوري.

٢,٢,٨,٢ البيانات الشهرية :

في حالة البيانات الشهرية قد يوجد تأثير موسمي وعشوائي لهذا نتبع الخطوات التالية :

١. نوجد القيم الاتجاهية T و الدليل الموسمي S .

٢. إذا كان النموذج ضربياً نقسم القيم الفعلية على قيم T و S المقابلة لها ونضرب الناتج في ١٠٠. ينتج عن ذلك ما تسمي بالغير منتظمة الدورية cyclical irregulars أما إذا كان النموذج جمعياً فنطرح T و S من Y .

٣. نتخلص من الآثار غير المنتظمة بأخذ متوسط متحرك مرجح مناسب للغير منتظمات الدورية أو الفروقات. الترجيح عادة يتم باستخدام معاملات ذو الحدين والتي تحدد حسب رتبة المتوسط المتحرك المستخدم. فإذا كانت ٥ مثلاً نضرب القيم بالترتيب في ١ ، ٤ ، ٦ ، ٤ و ١ ونقسم على مجموعها ١٦.

مثال (٢,١٠)

لتوضيح حساب المنسوب الدوري في حالة البيانات الشهرية نستخدم القيم الخاصة بالسنوات الخمس الأولى من السلسلة بجدول (٢,٥) بافتراض النموذج الضربي.

الشهر	Y	T	S	التغيرات غير المنتظمة الدورية	المنسوب الدوري
J	٠	١٣,٦٠	٥٣,١	٠	—
F	٢	١٣,٦٣	٣٧,٢	٣٩,٤٤	٢٩,٣٨
M	١٠	١٣,٦٥	١٨٩,٦	٣٨,٦٤	٣٦,٨٥
A	٤	١٣,٦٦	٩٥,٤	٣٠,٦٩	٩٧,٠٦
Ma	٨٩	١٣,٦٨	٢٢٥,٧	٢٨٨,٢٥	—

جدول (٢,٨)

القيم الاتجاهية بالعمود الثالث تم الحصول عليها باستخدام معادلة الاتجاه العام المقدرة للسلسلة الزمنية بجدول (٢,٥) :

$$\hat{y} = 14.033 + 0.007x$$

(حيث نقطة الأصل منتصف الفترة بين آخر يونيو وأول يوليو ١٩٨١ والوحدة الزمنية نصف شهر)

مثلاً القيمة الأولى نحصل عليها بتعويض قيمة x المقابلة لينـاير ١٩٧٩ وهـي ٥٩- أمـا الآثار الموسمية S فهي كما بجدول (٢,٦).

التغيرات غير المنتظمة الدورية يتم حسابها بقسمة كـل قيمـة فعليـة بالسلسـلة الزمنية على حاصل ضرب قيم T و S المقابلة وضرب الناتج في ١٠٠×١٠٠. سـبب الضرب في ال١٠٠ الأولى لإلغاء تأثير الضرب في ١٠٠ عند حساب S وسبب الضرب في ال١٠٠ الثانية لجعل التغيرات في شكل نسبة مئوية.

أما قيم المنسوب الدوري بالعمود الأخير فهي عبارة عن متوسـطات متحركـة برتبـة ٣ مرجحـة بمعـاملات ذو الحـدين . فمـثلاً القيمـة ٢٩,٣٨ حسـبت كالتـالي :

$$\frac{(1\times 0 + 2\times 39.44 + 1\times 38.64)}{1+2+1} = 29.38$$

حيث ١ ، ٢ ، ١ معاملات ذو الحدين ل $n = 2$

٢,٢,٩ عزل الآثار العشوائية :

بعد تقدير كل من الاتجاه العام ، التأثير الموسمي والتأثير الدوري يمكـن عـزل التـأثير المتبقـي أي المنـتظم . ويعتمـد ذلـك علـى النمـوذج المسـتخدم. فـإذا كانـت Y_t، S_t، T_t و C_t القيمة الفعلية ، الدليل الموسمي ، القيمة الاتجاهيـة والتـأثير في الزمن t فإن التأثير العشوائي في الزمن t يكون

$$I_t = \frac{Y_t \times 100 \times 100}{T_t \times S_t \times C_t}$$

إذا كان النموذج ضـربياً و $I_t = Y_t - T_t - S_t - C_t$ إذا كـان جمعيـاً. لاحـظ أن الضرب في ١٠٠ مرتين لإلغاء تأثير الضرب في ١٠٠ عن حساب S_t و C_t.

٢,٢,١٠ اختبارات لتقييم نجاح التجزئة :

بعد تطبيق طريقة التجزئة على السلسلة الزمنية وتقدير المكونات المختلفـة قـد تتساءل عما إذا كانت عملية التجزئة ناجحة. هناك عدة اختبارات تستخدم في الإجابة على مثل هذه الأسئلة نذكر بإيجاز بعضها.

٢,٢,١٠,١ اختبار الشهر المجاور Adjacent month test

هذا الاختبار مفيد بصفة خاصـة في السلاسـل الشـهرية عنـدما نقـدر الـدليل الموسمي S ونستخدمه لإزالة التأثير الموسمي من السلسلة ونرغب في معرفة ما إذا كان التأثير الموسمي قد أزيل من السلسلة. في هذه الحالة نحسب النسبة بين قيمة كـل شـهر ومتوسط قيمتي الشهر الذي يسبقه والذي يليه فى السلسلة الزمنية الأصلية. ثم نحسب هذه النسب للسلسلة بعد إزالة التأثير الموسمي فإذا كان هناك تأثيراً موسمياً في السلسلة الأصلية ونجحنا في إزالته فسنجد أن الاختلافات بين النسب في السلسلة الأصلية كبيرة بينما في السلسلة التي أزيل منها التأثير الموسمي صغيرة.

من ناحية أخري إذا حسبنا متوسط النسب لكل شهر (عبر السنوات) نحصل على صورة أوضح للاختلافات بين الشهور.

٢,٢,١٠,٢ اختبار يناير January test

إذا قسمنا كل قيمة في السلسلة التي أزيل منها التأثير الموسمي علـى القيمـة في يناير السابق نحصل على قيم معيارية يمثل شهر يناير فيها شهر الأساس. فإذا ظهر نمـط معين في هذه النسب فهذا يعني أن التأثير الموسمي لم تتم إزالته بشكل كامل. نلاحظ أن اختبار يناير يساعد في كشف أي موسمية داخل السنة بينما اختبار الشهر المجاور يكشف وجود الموسمية بين السنوات.

٣,١٠,٢,٢ اختبارات التغير المئوية Percentage change test

وتقوم على حساب التغير الذي حدث في أي شهر كنسبة مئوية من القيمة في الشهر السابق. فإذا كانت القيمة في شهر معين ١٢٠ وفي الشهر التالي له ١٣٠ فإن النسبة المئوية تكون

$$\left(\frac{130-120}{120}\right)\times 100 = 8.33\%$$

ويمكن إجراء هذا الاختبار على السلسلة الأصلية وعلى أساس كل من السلسلة الخالية من التأثير الموسمي ، سلسلة المكون العشوائي وسلسلة مكون الاتجاه العام والدوري (معاً).

مقارنة نتيجة اختبار التغير المئوي للسلسلة الخالية من التأثير الموسمي مع النتيجة المتحصل عليها من تطبيقه على السلسلة الأصلية يساعد في كشف حجم التغيرات الناتجة عن التأثير الموسمي. فإذا كان المتوسط الكلي لنسب التغير الشهري في السلسلة الأصلية ١٠,٥ مثلاً و كان المتوسط الكلي لنسب التغير الشهري في السلسلة الخالية من التأثير الموسمي ٢,٣ فإن نسبة التغير الشهري
الناتجة عن التأثير الموسمي تكون $10.5 - 2.3 = 8.2$.

وإذا حسبت نسب التغير الشهري للسلسلة التي قيمتها المكونات غير المنتظمة (أو العشوائية) وكان متوسطها الكلي ١,٦ مثلاً فإن هذا الرقم يعطي مؤشراً للتغير الشهري في السلسلة الناتج عن التغيرات العشوائية، وواضح أن الفرق

$$10.5-8.2-1.6 = 0.7\%$$

يمكن إرجاعه للتغير الناتج عن **T** و **C** . لاحظ أن المتوسط الكلي للتغير في المكون العشوائي يمثل الحد الادني لخطأ التنبؤ المتوقع من السلسلة.

من ناحية أخري فإن تطبيق الاختبار على سلسلة الاتجاه العام – الدوري يبرز التغير الشهري فيها.

٢,٢,١١ طرق تجزئة أخري

منذ خمسينات القرن العشرين ظهر عدد من طرق التجزئة المطورة والتي تمثل جميعها طرقاً مطورة من طريقة التجزئة التقليدية. وتهدف هذه الطرق – والتي تعرف أيضا بطرق التعديل **adjustment methods** إلى تحسين مقدرات التأثير الموسمي ، الدوري ، الاتجاه العام والغير منتظم ، ومن ثم تعديل السلسلة الزمنية بحيث تغدو خالية من التأثير الموسمي والغير منتظم لتمكين إبراز الاتجاه العام والتغيرات الدورية فقط. وهي تقوم بذلك من خلال سلسلة من التعديلات والمتوسطات المتحركة (المعقدة أحياناً) مستفيدة من التطور الكبير في الحاسبات الآلية .

أولي هذه الطرق وأهمها هي الطريقة المسماة "تعداد ٢ **Census II**" التي ابتكرها واستخدمها المكتب الأمريكي للتعداد عام ١٩٥٥. الملامح الرئيسية لهذه الطريقة عند تطبيقها على بيانات شهرية كما يلي :

١. تحسب النسب للمتوسط المتحرك كما في طريقة التجزئة التقليدية.

٢. يتم التعويض عن المتوسطات المتحركة التي تفقد في أول السلسلة وآخرها بتقديرات معينة.

٣. يقضى على التغيرات غير المنتظمة في النسب للمتوسط المتحرك بأخذ متوسط متحرك (مركب).

٤. تعدل النسب المعدلة بحيث يصبح مجموعها في كل سنة مساوياً ل١٢٠٠. تمثل هذه النسب الآن تقدير مبدئي للعوامل الموسمية للأشهر المختلفة.

٥. تخلص السلسلة من التأثير الموسمي باستخدام العوامل الموسمية بخطوة (٤) يعتبر هذا تخليص أولي للسلسلة الزمنية من التأثير الموسمي.

٦. تطبيق متوسطات متحركة على السلسلة بخطوة (٥) للقضاء على أي آثار موسمية وغير منتظمة لم يتم القضاء عليها بعد. ويتحقق ذلك من خلال سلسلة من الخطوات المشابهة لتلك التي استخدمت للحصول على السلسلة الخالية (شكل أولى) من التأثير الموسمي بخطوة (٥). أي أن السلسلة الخالية – أولياً- من التأثير الموسمي تستخدم

كنقطة بداية فتحسب متوسطات متحركة ، نسب لمتوسط متحرك ، تخليص من الأثر الموسمي ثم العشوائي للحصول على سلسلة خالية نهائياً من التأثير الموسمي.

وقد أدت الأبحاث المكثفة الموجهة نحو تحسين طرق تعديل السلسلة الزمنية إلى ظهور مجموعة الطرق المشار إليها بطرق X ومن أهمها $X-11-ARIMA$ و$X-12-ARIMA$. وبينما تستخدم census II مجموعة من المتوسطات المتحركة المتنوعة لتحسين تقدير القيم الضائعة (بسبب استخدام المتوسطات المتحركة) ولتحسين مقدرات التأثيرات الموسمية والتأثيرات الأخرى تلجأ $X-11-ARIMA$ و$X-12-ARIMA$ لاستخدام نماذج أريما للتنبؤ بالقيم التي تضيع في أول السلسلة الزمنية وآخرها. وتسبق طريقة $X-12-ARIMA$ عادة استخدام طريقة أخرى هي **Reg ARIMA** والتي تستخدم نموذج انحدار يمثل العلاقة بين قيم السلسلة ومتغيرات تمثل التقويم (أيام الشهر) بهدف معرفة أثر الاختلاف فيه وتعديل السلسلة في ضوء ذلك إضافة لمعرفة القيم الشاذة في السلسلة.

وتتوفر بعض البرمجيات الخاصة لتنفيذ تعديل السلاسل الزمنية. ومن بين هذه البرنامج **DEMETRA** والذي يستخدم لتنفيذ **X- ١١-ARIMA** .

الباب الثالث

التحليل الطيفى

٣,١ مقدمة

تفترض طريقة التجزئة أن قيم السلسلة الزمنية ناتجة عن أربعة أنواع من التأثيرات التي تعطى مفعولها بشكل جمعي أو ضربي ، والهدف من استخدام تلك الطريقة هو قياس كل من هذه التأثيرات أو عزلة. أما في التحليل الطيفى فينظر للسلسلة الزمنية على أنها نتاج لموجات جيب خفية والهدف من التحليل التوصل للموجات ذات التأثير الأكبر على السلسلة ومعرفة أطوالها وبالتالي عدد المرات التي تتكرر بها في مدى البيانات.

وفي هذا الباب نتعرف على أساسيات التحليل الطيفى.

٣,٢ دالة الجيب Sine function

تأخذ دالة الجيب الشكل

$$Y = \sin\theta$$

حيث سنفترض ، للتبسيط أن $0 \le \theta \le 2\pi$. وهي تكمل دورة كاملة (موجة) عندما تأخذ θ قيما بين 0 و 360^0 أو بين ٠ و 2π بمقياس الراديان.

وهناك ثلاثة خصائص لموجة الجيب وهي :

١. طول الموجة **Wave length**

ويقاس بطول المسافة بين أي قمتين متجاورتين تقعان في نفس الجانب من المحور الأفقي.

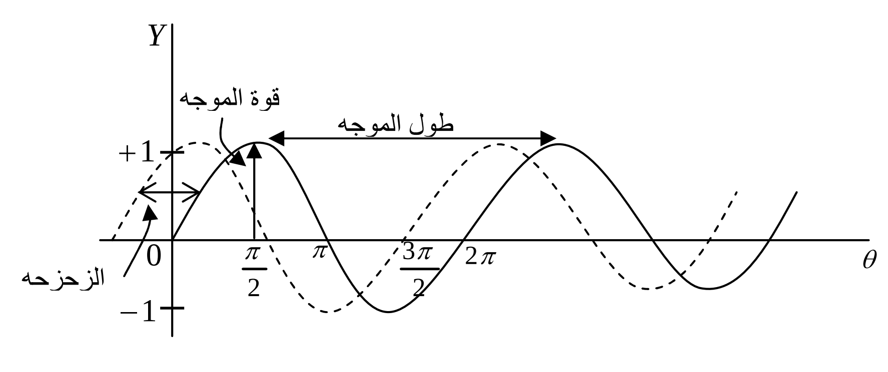
٢. قوة الموجة **Amplitude**

وهو أقصي ارتفاع للموجة ويعبر عن قوتها.

٣. الزحزحة **Shift**

ويقصد بها الزحزحة الأفقية للموجة عندما لا تبدأ من نقطة الأصل.

ويوضح شكل (١ ,٣) المقصود بكل من هذه المصطلحات



شكل (٣.١)

ويمكن إثبات أنه لأى سلسلة زمنية بحجم n المسـافات الزمنيـة فيهـا متسـاوية يمكن دائماً تجزئها لموجات جيب بأطوال وتكـرارات مختلفـة. لكـن إذا كانـت n عـدد فردي فإن عدد موجات الجيب التي يمكن توفيقها بطريقة المربعات الصغرى لا يزيد عن $(n-1)/2$ بينمـا العـدد الأقصـى الـذي يمكـن توفيقـه في حالـة عـدد زوجـي $(n-1)/2$.

<u>١ ,٢ ,٣ توفيق دالة جيب واحدة بتكرار معروف</u>

أفرض أن لدينا سلسلة زمنية حجمها n ونريد أن نوفق دالة جيب بموجة ذات تكرار f' عليها كما فعلنا حين سعينا لتوفيق خط مستقيم يمثل الاتجاه العام للسلسلة. نلاحظ أولاً أننا يجب أن نضع دالة الجيب بشكل تكون فيه دالة في f' وتكون بدلالة الزمن t (بدلاً عن الزاوية θ)، كما تظهر فيها زاوية الإزاحـة وقـوة الموجـة واللـتين يمكن تقديرهما بطريقة المربعات الصغرى حسب طبيعة السلسلة الزمنية.

بما أن السلسلة الزمنية بها وحدات زمنية متقطعة وليست هناك زوايـا فيجـب تحويل وحدة القياس لوحدة زمنية بدلاً عن زاوية. ولأن السلسلة الزمنية تأخـذ قيمهـا في الأزمنة n , n- ١ , ... , t , ... , ٢ , ١ ,٠ وبما أن مدي قـيم الزاويـة مـن 0 الى 2π فإن الزوايا المقابلة لهذه الوحدات الزمنية هي بالترتيب

$$0,\left(\frac{1}{n}\right)2\pi,\left(\frac{2}{n}\right)2\pi,\ldots,\left(\frac{t}{n}\right)2\pi,\ldots,\left(\frac{n-1}{n}\right)2\pi,\ldots,2\pi$$

أي أننا نأخذ قيماً للزوايا بين ٠ و 2π تتزايد بمقدار ثابت $\frac{1}{n}$. وبالتالي يمكن كتابة دالة الجيب بالشكل :

$$Y_t = \sin\left[\left(\frac{t}{n}\right)2\pi\right]$$

حيث المقدار داخل القوس المربع يمثل الزاوية في الزمن t.

لكن هذا يعنى أن قيمة قوة الموجة ستكون فقط بين١+ (عندما تكون الزاوية داخل القوس المربع $\frac{\pi}{2}$) و ١- (عندما تكون $\frac{3\pi}{2}$). و لإفساح المجال لقوة الموجة أن تكون أي مقدار تحدده طبيعة السلسلة نضع

$$Y_t = A\sin\left[\left(\frac{t}{n}\right)2\pi\right]$$

هذا يجعل قوة الموجة تتراوح بين A– و+A.

من ناحية أخري ، من خصائص موجة الجيب أننا إذا ضربنا 2π في العدد الصحيح الموجب f' فإن طولها يتقلص إلي $\frac{n}{f'}$ ما يعني أنها تكمل f' دورة كاملة (أو تكرر f' مرة) خلال الـn مشاهدة. نقول في هذه الحالة أن تكرار الموجة f' . وعليه لتكون موجة الجيب ذات تكرار f' كما نرغب نضرب 2π في f' لنحصل على :

$$Y_t = A\sin\left[\left(\frac{f't}{n}\right)2\pi\right]$$

أخيراً ، قد لا تبدأ الموجة الخاصة بالسلسلة من الصفر. لهذا نضيف زاوية زحزحة بمقدار ϕ يتحدد حسب طبيعة السلسلة. تصبح دالة الجيب الآن بالصورة : (٣,١)...

$$Y_t = A\sin\left[\left(\frac{f't}{n}\right)2\pi + \phi\right]$$

هذا يجعل الموجة لا تبدأ من الصفر حتى إذا كانت $t = 0$. مثلاً إذا كانت $\phi = \frac{\pi}{2}$ و t صفر فإن قوة الموجة تصبح A+ وتكون على المحور الراسي.

لدينا الآن دالة تمثل موجة جيب بقوة A ، تكرار f' وزاوية زحزحة ϕ.

غير أنه من غير المتوقع أن يتطابق نمط السلسلة الزمنية مع منحني هذه الدالة تماماً ، وذلك بسبب التغيرات العشوائية والطارئة التي يمكن أن تؤثر على قيم السلسلة لهذا سنفترض أن السلسلة الزمنية يمكن تمثيلها بالنموذج التالي :

$$y_t = A\ \sin\left[\left(\frac{f't}{n}\right)2\pi + \phi\right] + e_t \qquad ...(٣,٢)$$

حيث e_t متغير عشوائي بمتوسط صفر وتباين σ^2 وحيث y_t متغير يمثل المتغير Y كانحراف من متوسطه . المعادلة (٣,٢) هي معادلة انحدار غير خطية ويصعب حلها مباشرة بسبب وجود علامة + داخل القوس المربع . ونتذكر أن المجاهيل المراد تقديرها هي A و ϕ .

لتطبيق طريقه المربعات الصغرى على (٣,٢) نستفيد من النتيجة في حساب المثلثات التي تقول :

$$\sin(U+V) = \sin U\cos V + \cos U\sin V$$

وبوضع $V = \phi, U = \left(\frac{f't}{n}\right)2\pi$

تصبح المعادلة :

$$y_t = A\left[(\sin\left(\frac{f't}{n}\right)2\pi)\ (\cos\phi) + (\cos\left(\frac{f't}{n}\right)2\pi)\ (\sin\phi) \right] + e_t$$

$$= b_1\ \sin\left[\left(\frac{f't}{n}\right)2\pi\right] + b_2 \cos\left[\left(\frac{f't}{n}\right)2\pi\right] + e_t$$

$$= b_1 x_1 + b_2 x_2 + e_t \qquad ...(٣,٣)$$

حيث : $b_2 = A\sin\phi \quad , \ b_1 = A\cos\phi$

$$x_1 = \sin\left[\left(\frac{f't}{n}\right)2\pi\right] \quad , x_2 = \cos\left[\left(\frac{f't}{n}\right)2\pi\right]$$

وهي بهذا الشكل تمثل نموذج انحدار عادي يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى عليه لإيجاد مقدرات لـ b_1 و b_2 ومن ثم لـ**A** و ϕ.

فإذا كانت مقدرات المربعات الصغرى ل b_1 و b_2 هما بالترتيب $\hat{b}_1$ و $\hat{b}_2$

فبما أن $b_1^2 + b_2^2 = A^2\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) = A^2$

فإن مقدر قوة الموجة يكون

$$\hat{A} = \sqrt{\hat{b}_1^2 + \hat{b}_2^2}$$

أما $\hat{\phi}$ فيمكن إيجادها بأخذ المقابل لـ $\cos\hat{\phi}$ المعرفة ب

$\cos\hat{\phi} = \dfrac{\hat{b}_1}{\sqrt{\hat{b}_1^2 + \hat{b}_2^2}}$. أو المقابل $\sin\hat{\phi}$ التي تساوي $\dfrac{\hat{b}_2}{\sqrt{\hat{b}_1^2 + \hat{b}_2^2}}$

٣,٢,٢ توفيق k موجة جيب بتكرارات معروفة

يمكن تعميم النتائج السابقة مباشرة لتشمل توفيق عدد k من دوال الجيب حيث الحد الأعلى لk هو $(n-1)/2$ في حالة n عدد فردي و $(n-1)/2$ في حالة عدد زوجي.

النموذج في هذه الحالة تعميم ل(٣,٣) ويأخذ الشكل :

... (٣,٤)

$$y_t = \sum_{i=1}^{k} \left[b_{1i} \ \sin\left(\frac{f_i' t}{n}\right) 2\pi \ + b_{2i} \ \cos\left(\frac{f_i' t}{n}\right) 2\pi) \ \right] + e_t$$

وبتطبيق طريقة المربعات الصغرى نحصل على المقدرات ($\hat{b}_{1i} \ \hat{b}_{2i}$,) حيث $i = 1, 2, ..., k$ ل($b_{1i} \ b_{2i}$,). وبالتالي المقدرات :

$$\hat{A}_i = \sqrt{\hat{b}_{1i}^2 + \hat{b}_{2i}^2} \qquad i = 1, ..., k$$

كما نحصل على ال $\hat{\phi}_i$ من $\sin \hat{\phi}_i = \dfrac{\hat{b}_{2i}}{\hat{A}_i}$

٣,٣ البيريودوقرام The periodogram

افترضنا حتى الآن أن التكرارات f_i' معروفة. لكن في الواقع لا نعرف عادة ما هي الموجات المؤثرة على السلسلة وبالتالي تكراراتها. في هذه الحالة لا نفترض مسبقاً تكرارات معينة ونترك للبيانات بالسلسلة تحديد التكرارات المؤثرة والتي نحتاج لتوفيقها.

إذا وضعنا $f_i' = i$ و $f_i = \dfrac{i}{n}$ يمكن كتابه (٣,٤) بالشكل المختلف قليلاً

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \left[\alpha_i \ s_{it} + \beta_i \, c_{it} \right] + e_t \ ... (٣,٥)$$

حيـــــــث $s_{it} = \sin 2\pi\ f_i t$ و $c_{it} = \cos 2\pi\ f_i t$ وحيـــــــث $\alpha_i\ (i = 0,1,\ldots,k)$ و $\beta_i\ (i = 1,\ldots,k)$ معاملات فـورير. ويطلـق علـى عمليـة تطبيق طريقه المربعات الصغرى لتقدير هذه المعاملات أسماء مختلفة (رغم أن كل منها يحمـل معنـاً معينـاً) منهـا تحليـل فـورير **Fourier analysis** والتحليـل التـوافقي **harmonic analysis** والتحليــل الطيفــى **spectral analysis** وتحليــل البيريودوقرام.

ويمكن إثبات أنه إذا كانت **n** عدد فـردي فـإن مقـدرات المربعـات الصـغرى لـ α_0 ، $\alpha_i\ (i = 1,\ldots,k)$ و $\beta_i\ (i = 1,\ldots,k)$ هى بالترتيب:

$$a_0 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t$$

$$a_i = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t s_{it} \qquad i = 1,\ldots,k$$

$$b_i = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t c_{it} \qquad i = 1,\ldots,k$$

أما إذا كانت **n** عدد زوجي ووضعنا $n = 2k$ فإن

$$b_k = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} (-1)^t Y_t$$

و $a_k = 0$

وتبقي بقية المقدرات كما في حالة **n** عدد فردي.

ويتكون البيريودوقرام من القيم

$$I(f_i) = \frac{n}{2}\left(a_i^2 + b_i^2\right) \qquad i = 1,\ldots,k$$

في حالة **n** عدد فردي . وفي حالة **n** عدد زوجـي تكـون قيمـة البيريـودوقرام للموجة ذات التكرار **k** :

$$I(f_k) = I(0.5) = nb_k^2$$

وقد تم وضع $f_k = 0.5$ لأن أكبر تكرار نسبي هو ٠,٥ . ذلك لأن أقـل عـدد من الوحدات الزمنية تحتاجها الموجـة لتكمـل موجـة كاملـة هـو ٢ ، فـإذا كـان عـدد الوحدات مثلاً ٤٨ فإن أكبر عدد ممكن من الموجات الكاملة سيكون ٢٤ وبالتالي أكبر تكرار نسبي يكون $0.5 = \frac{24}{48}$.

وفي البيريودوقرام تمثل $I\left(f_i\right)$ قوة أو كثافة الموجة ذات التكرار (النسبي) f_i وبالتالي تكون الموجة ذات القـوة $I\left(f\right)$ الأكـبر هـى الأكثـر تـأثيراً علـى السلسـلة الزمنية. وليس ذلك بمستغرب إذا علمنا أن $I\left(f_i\right)$ تمثل في الواقع مجمـوع المربعــات الخاص بالموجة ذات التكـرار f_i إذا أجرينا تحـليل تباين جزأنا فيـه مجمـوع مربعـات انحرافات قيم السلسلة Y عن وسطها الحسابي $\overline{Y}$. ذلك أنه يمكـن إثبـات أن مجمـوع المربعــات $\sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - \overline{Y}\right)^2$ يســاوي $\sum_{i=1}^{k} I\left(f_i\right)$. أي أنـــه يمكـــن تجزئتـــه إلـــي $k = \frac{(n-1)}{2}$ مكوّن (في حالة n عدد فردي) كل منها يمثل مجموع المربعات الخاص بزوج $\left(a_i, b_i\right)$ أي $I\left(f_i\right)$ بدرجات حرية ٢. وفي حالة n عدد زوجي يكون هناك $\frac{(n-2)}{2}$ مجموع مربعات كل منها بدرجات حريه ٢ إضـافة لدرجـة حريـة واحـدة مرتبطة ب b_k. ونرى من ذلك أن الموجه التى تكون قيمـة البيريـودوقرام المقابلـة لهـا كبيرة هي التي يكون تأثيرها على التغيرات في السلسلة الزمنية كبيراً.

من ناحية أخري إذا كانت السلسلة الزمنية لا تحوى أي موجات جيب بحيـث تتكون كل قيمة Y_t من متوسـط عـام α_0 وخطـأ عشـوائي e_t فقـط وكانـت ال e_t مستقلة وكل منها يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي صفر وتباين σ^2 فإن $I\left(f_i\right)$ ستتبع التوزيع $\sigma^2 \chi(2)$ حيث $\chi^2(2)$ توزيع χ^2 بدرجات حرية ٢ وحيـث ال $I\left(f_i\right)$ مستقلة.

أما إذا كانت هناك موجة جيب بتكرار f_i وقوة موجة A وزاوية زحزحة ϕ فإن قيمة Y_t تأخذ الشكل :

$$Y_t = \alpha_0 + A[\cos(2\pi\ f_i\, t)\sin\phi + \sin(2\pi\ f_i\, t)\cos\phi] + e_t$$

وفي هذه الحالة يكون توقع $I(f_i)$ مساويا ل $2\sigma^2 + \frac{n}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$ وليست $2\sigma^2$ كما في حالة السلسلة العشوائية (نذكر أن $\alpha^2 + \beta^2 = A^2$).

مما يعني أن البيرودقرام يتضخم في حالة وجود مكوّن جيب.

٣,٤ طيف العينة The sample spectrum

في البيرودوقرام افترضنا أن التكرارات النسبية تأخذ القيم $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},...$ أي هي مضاعفات التكرار الأساسي **fundamental frequency** $\frac{1}{n}$. إذا تخلينا عن هذا الافتراض وسمحنا ل f بأن تكون متغيراً متصلاً يمكن أن يأخذ أي قيمة في المجال $0-0.5$ فيمكن أن نحصل على الصيغة المعدلة للبيريودوقرام:

$$I(f) = \frac{n}{2}\left(a_f^2 + b_f^2\right) \qquad 0 \le f \le 0.5$$

تسمى $I(f)$ في هذه الحالة طيف العينة. ويستخدم طيف العينة أيضاً لمعرفة الموجات المؤثرة في السلسلة الزمنية وقياس قوتها. وهو الخيار المناسب إذا كنا لا نعلم أن f يمكن أن تأخذ فقط إحدى القيم $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},...$ بل يمكن أن تأخذ أى قيمة في المدى ٠ إلي ٠,٥ .

٣,٥ الطيف The spectrum ودالة كثافة الطيف Spectral density function

في السلاسل الزمنية التي تكون خاضعة لموجات جيب ذات تكرارات محددة يساعد كل من البيريودوقرام وطيف العينة في إبراز الموجات المؤثرة. ولكن هناك سلاسل زمنية تتغير فيها تكرارات وقوة وزحزحه الموجات بشكل عشوائي. في مثل

هذه السلاسل يُظهر كل من البيريودوقرام وطيف العينة تقلبات كبيرة بحيث لا يمكن إعطاء قيمتها معنى.

أفرض الآن أن لدينا سلسلة زمنية بحجم **n** وأن هذه السلسلة يمكن النظر إليها كتحقيق (في الواقع) لعملية تتبع التوزيع الطبيعي ولا تتغير مع الزمن. إذا أجرينا عدداً من التحقيقات لهذه العملية بحيث يتكون كل تحقيق من **n** مشاهدة فيمكن حساب a_f, b_f و $I(f)$ لكل تحقيق (أو سلسلة زمنية تمت مشاهدتها).

وإذا رمزنا لمتوسط قيم $I(f)$ ب $E(I(f))$ فإن نهاية هذا المتوسط عندما تؤول **n** لما لا نهاية تسمي طيف القوة **Power Spectrum** ويرمز له ب$P(f)$ أي

$$P(f) = \lim_{n \to \infty} E(I(f))$$

ويشار لطيف القوة عادة بالطيف **spectrum** اختصاراً .

إذا قسمنا الطيف $P(f)$ على تباين فيم السلسلة σ_y^2 نحصل على ما يسمي بدالة كثافة الطيف ونرمز لها ب $K(f)$:

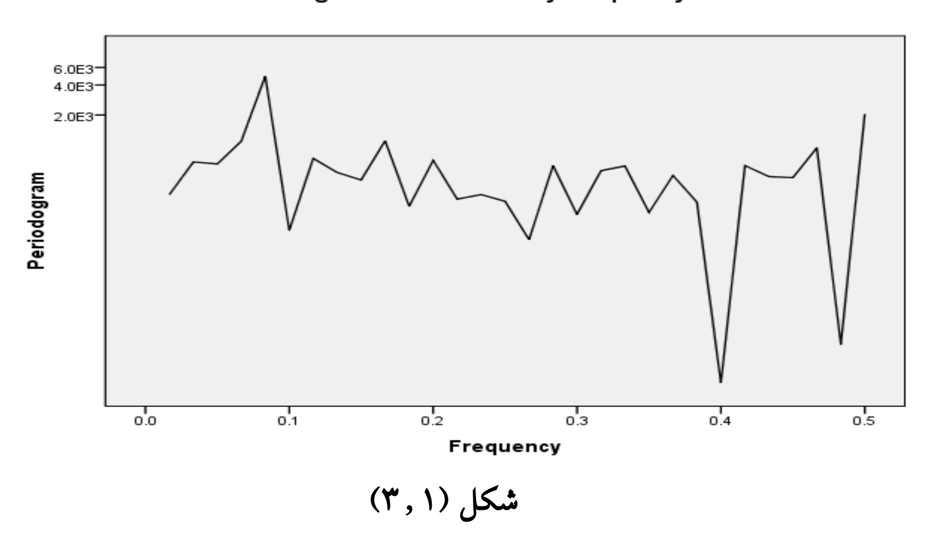
$$K(f) = P(f) / \sigma_y^2$$

وتتميز $K(f)$ بخصائص دالة الكثافة الاحتمالية

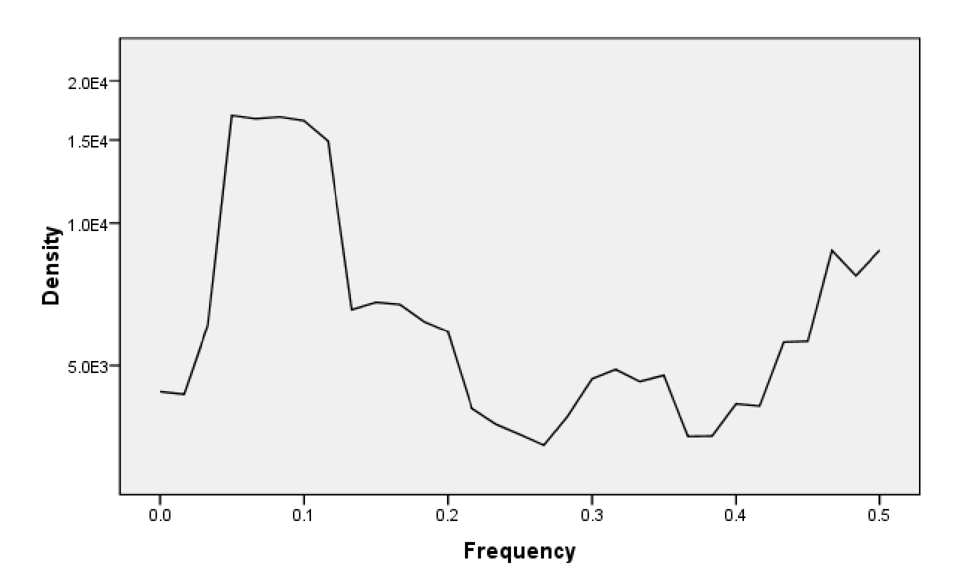
$$K(f) > 0, \qquad \int_0^{0.5} K(f) df = 1$$

<u>مثال (١ ,٣)</u>

يوضح شكل (١ ,٣) و(٢ ,٣) البيريودوقرام وكثافة الطيف بالترتيب لبيانات سلسلة الزلاجات المائية. ونلاحظ من الشكل (١ ,٣) أن اكبر موجه هى ذات التكرار ٠٨ , ٠ تقريباً مما يعنى أنها لموجه ذات طول ١٢ تقريباً(مقلوب ٠٨ , ٠).


Periodogram of VAR00001 by Frequency
6.0E3
4.0E3
2.0E3
Periodogram
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
Frequency

شكل (١ , ٣)


Spectral Density of VAR00001 by Frequency
2.0E4
1.5E4
1.0E4
5.0E3
Density
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
Frequency
Window: Tukey-Hamming (5)

٣,٦ دالة التغاير الذاتي The autocovariance function

من المفاهيم المرتبطة ارتباطاً وثيقاً بالتحليل الطيفي والتي لهـا أهميـة كـبيرة في بعض نماذج التنبؤ التي ستتعرض لها لاحقاً مفهـوم التغـاير الـذاتي ومفهـوم الارتبـاط الذاتي. والتعاريف التالية لهذه المصطلحات تفترض أن العملية التصادفيه التي تولـدت عنها السلسلة الزمنية ذات متوسط وتباين ثابت لا يتغير مـع الـزمن. ويعـرّف التغـاير الذاتي للمجتمع (تحديداً للعملية التصـادفيه المفـترض أنهـا ولـدت السلسـلة الزمنيـة المشاهدة) بإبطاء k (lag k):

$$\gamma_k = \operatorname{cov}\left[Y_t, Y_{t+k}\right]$$

$$= E\left[\left(Y_t - \mu\right)\left(Y_{t+k} - \mu\right)\right] \qquad \dots (٣,٦)$$

حيث μ متوسط المجتمع و cov تعني تغاير. بمعني آخر التغاير الذاتي بإبطاء k هو التغاير بين القيم التي تبعد عن بعض k وحده زمنية وواضح أن γ_0 يُمثل التباين.وإذا نظرنا للتغاير الذاتي للمجتمع كدالة في الإبطاء k تكون لدينا دالة التغاير الذاتي للمجتمع **population autocovariance function.**

وبما أننا في الواقع نشاهد سلسلة زمنية محدودة بحجم n مثلاً فاننا نحتاج لتقدير γ_k منها. وهناك عدة مقدرات للتغاير بإبطاء k أكثرها استخداماً المقدر

$$C_k = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}\left(Y_t - \bar{Y}\right)\left(Y_{t+k} - \bar{Y}\right) \qquad \dots (٣,٧)$$

وكدالة في k تعطى قـيم C_k دالـة تغـاير العينـة **sample autocovariance function**

٣,٧ الإرتباط الذاتي The autocorrelation

معامل الارتباط الذاتي عندما يكون المتوسط ثابت والتباين غير ثابت يعرف :

$$\rho_k = \frac{E\left[\left(Y_t - \mu\right)\left(Y_{t+k} - \mu\right)\right]}{\sqrt{E\left(Y_t - \mu\right)^2 \; E\left(Y_{t+k} - \mu\right)^2}}$$

وإذا كان التباين أيضـاً ثابتـاً فـإن $E\left(Y_t - \mu\right)^2 = E\left(Y_{t+k} - \mu\right)^2$

وبالتالي يكون الارتباط الذاتي بإبطاء k:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \qquad \text{... (٣,٨)}$$

وإذا نظرنـــا ل ρ_k كدالـــة في k نحصـــل علـــى دالـــة الارتبـــاط الـــذاتي autocorrelation function (ACF) ويقـدر معامـل الارتبـاط الـذاتي مـن العينة ب r_k حيث

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} \left(Y_t - \bar{Y}\right)\left(Y_{t+k} - \bar{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{n} \left(Y_t - \bar{Y}\right)^2} \qquad \text{... (٣,٩)}$$

بافتراض ثبات المتوسط والتباين

٣,٦ العلاقة بين طيف العينة ومقدر التغاير الذاتي

يرتبط طيف العينة $I(f)$ بمقدر التغاير الذاتي C_k بعلاقة هامـة نوردهـا في النتيجة التالية.

نتيجة (٣,١)

$$I(f) = 2\left\{C_0 + 2\sum_{k=1}^{n-1} C_k \cos 2\pi f k\right\} \qquad 0 \le f \le 0.5$$

الإثبات

$$I(f) = \frac{n}{2}\left(a_f^2 + b_f^2\right) = \frac{n}{2}\left(b_f - ia_f\right)\left(b_f + ia_f\right)$$

حيث $i = \sqrt{-1}$ **وباستخدام**

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t s_{it} \\ b_i &= \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t c_{it} \end{aligned}\right\} i = 1, \ldots, k$$

ووضع المشاهدات في شكل انحراف عن المتوسط* :

$$\left(b_f - ia_f\right) = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - \overline{Y}\right)\left(c_{it} - is_{it}\right)$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - \overline{Y}\right)\left(\cos 2\pi ft - i\sin 2\pi ft\right)$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - \overline{Y}\right)e^{-i2\pi ft}$$

بالاستعانة بمعادلة إيولر $e^{-iz} = \cos z - i\sin z$.

وبالتالي:

$$I(f) = \sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - \overline{Y}\right)e^{-i2\pi ft} \times \frac{2}{n}\sum_{t'=1}^{n}\left(Y_{t'} - \overline{Y}\right)e^{i2\pi ft'}$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{t'=1}^{n}\left(Y_t - \overline{Y}\right)\left(Y_{t'} - \overline{Y}\right)e^{-i2\pi f(t-t')}$$

إذا وضعنا $k = t - t'$ ينتج بما أن $t = t' + k$ وأقصي قيمة لـ t هي n أن t' في المجموع الثاني لن تكون أكبر من $n-k$، وبالتالي

$$I(f) = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{t'=1}^{n-k}\left(Y_t - \overline{Y}\right)\left(Y_{t'} - \overline{Y}\right)e^{-i2\pi fk}$$

$$= 2\sum_{t=1}^{n}\left\{\frac{1}{n}\sum_{t'=1}^{n-k}\left(Y_{t'+k} - \overline{Y}\right)\left(Y_{t'} - \overline{Y}\right)\right\}e^{-i2\pi fk}$$

ولكن من (٣,٧) المقدار داخل القوس المتعرج هو C_k. إذن

$$I(f) = 2\sum_{t=1}^{n} C_k e^{-i2\pi fk}$$

* هذا يكافئ نقل α_0 من الطرف الأيمن من النموذج (٣.٥) ولا يؤثر في المقدرات b,a.

من التحويله $k=t-t'$ نلاحظ أنه عندما تكون $t=1$ تصبح $k=1-t'$ وتأخذ **k** قيمتها الصغرى عندما تأخذ t' قيمتها الكبرى **n**. هذا يعني أن أصغر قيمة لـ**k** هي

$k=1-n=-(n-1)$

كذلك عندما تكون $t=n$ تصبح $k=n-t'$ وتأخذ **k** قيمتها الكبرى عندما تأخذ t' قيمتها الصغرى وهي ١. هذا يعني أن أكبر قيمة لـ**k** هي $n-1$. وبالتالي

$$I(f)=2\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} C_k e^{-i2\pi fk}$$

$$=2\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} C_k\left[\cos(2\pi fk)-i\sin(2\pi fk)\right]\quad 0\le f\le 0.5$$

باستخدام معادلة أيولر مرة أخرى . لكن دالة الجيب دالة فردية بمعني أن $f(-x)=-f(x)$ وبالتالي عند جمعها في الفترة المتماثلة $[-(n-1),(n-1)]$ يكون المجموع صفراً. هذا يؤدي لاختفاء الحد الثاني داخل القوس ونصل للنتيجة:

$$I(f)=2\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} C_k\cos(2\pi fk)$$

لكن عند $k=0$ يكون $\cos(2\pi fk)=\cos 0=1$ وبالتالي يمكن فصل الحالة $k=0$ من المجموع

$$I(f)=2\left[C_0+\sum_{\substack{k=-(n-1)\\k\neq 0}}^{n-1} C_k\cos(2\pi fk)\right]$$

كذلك لتماثل الفترة $[-(n-1),n-1]$ ولأن $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$:

$$\sum_{\substack{k=-(n-1)\\k\neq 0}}^{n-1} C_k\cos(2\pi fk)=2\sum_{k=1}^{n-1} C_k\cos(2\pi fk)$$

لنصل أخيراً للنتيجة المراد إثباتها :

$$I(f)=2\left[C_0+2\sum_{k=1}^{n-1}C_k\cos 2\pi fk\right]\qquad 0\le f\le 0.5$$

وقد وجد أن متوسط مقدر معامل التغاير الذاتي يؤول لمعامل التغاير الذاتي في المجتمع عندما $n\to\infty$ أى

$$\lim_{n\to\infty}E(C_k)=\gamma_k$$

من ذلك نستنتج التالي :

$$P(f)=\lim_{n\to\infty}E(I(f))=2\left[\lim_{n\to\infty}E(C_0)+2\sum_{k-1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}E(C_k)\cos(2\pi fk)\right]$$

$$=2\left[\gamma_0+2\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\cos(2\pi fk)\right]$$

وإذا قسمنا على التباين γ_0 نحصل على دالة كثافة الطيف

$$K(f)=2\left[1\ +2\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\rho_k\cos(2\pi fk)\right]\qquad 0\le f\le 0.5$$

كدالة في الارتباط الذاتي للمجتمع.

العلاقة بين دالة كثافة الطيف ودالة الارتباط الذاتي تعني أن كل منهما يمكن الحصول عليه كتحويله من الآخر مما يعني أيضاً أنهما متكافئتان رياضياً. ولكن هذا لا يعني أنه يمكن الاستغناء عن أحداهما لأن كل منهما يسلط الضوء على جانب مختلف من السلسلة الزمنية. فدالة كثافة الطيف تلقي الضوء على الموجات المؤثرة والطاغية في السلسلة وتكراراتها بينما توضح دالة الارتباط الذاتي ما إذا كانت القيم المتتالية في السلسلة ترتبط بارتباط موجب (ينعكس في شكل تمهيد نسبي بالسلسلة) أم ارتباط سالب (تظهر فيه السلسلة بشكل تتبادل فيه التغيرات الموجبة والسالبة الظهور). وكما قال بوكس وجنكينز (١٩٧٦) "أنهما معاً تساعدان في جعل السلسلة الزمنية تتحدث

عن نفسها ويلعبان بالتالي في تحليل السلاسل الزمنية الدور الذي يلعبه المدرج التكراري في تحليل توزيع البيانات بإشارته للتوزيع النظري الذي يمكن أن يكون مناسباً لتمثيلها.

مثال (٢ , ٣) :

افترض العملية التصادفيه البسيطة

$$Y_t = 5 + e_t + e_{t-1} + e_{t-2}$$

حيث e_t، e_{t-1} و e_{t-2} متغيرات عشوائية غير مرتبطة يتبع كل منها التوزيع الطبيعي بمتوسط ٠ وتباين ١. يمكن تمثيل هذه العملية من خلال دالة التغاير الذاتي ، أو دالة الارتباط الذاتي أو دالة كثافة الطيف كما يلي :

نلاحظ أولاً أن : $E(e_i) = 0$ لكل i وبالتالي $\sigma^2 = V(e_i) = E(e_i^2) = 1$.

كذلك وبسبب عدم ارتباط ال $e's$ فإنه ل $i \neq i'$:

$$\operatorname{cov}(e_i, e_{i'}) = E(e_i\, e_{i'}) = 0$$

أيضاً $E(Y_t) = 5$

دالة التغاير الذاتي :

عند $k = 0$ (التباين) :

$$\gamma_0 = E[Y_t - 5]^2 = E[5 + e_t + e_{t-1} + e_{t-2} - 5]^2$$
$$= E(e_t^2) + E(e_{t-1}^2) + E(e_{t-2}^2) + 2E(e_t e_{t-1} + e_t e_{t-2} + e_{t-1} e_{t-2})$$
$$= 1 + 1 + 1 + 0 = 3$$

عند $k = 1$:

$$\gamma_1 = E[Y_t - 5][Y_{t+1} - 5] = E(e_t + e_{t-1} + e_{t-2})(e_{t+1} + e_t + e_{t-1})$$
$$= E(e_t^2) + E(e_{t-1}^2) + E(2e_t e_{t-1} + e_t e_{t+1} + e_{t-1} e_{t+1} + e_{t-2} e_{t+1} + e_{t-2} e_t + e_{t-2} e_{t-1})$$
$$= 1 + 1 + 0 = 2$$

عند $k = 2$:

$$\gamma_2 = E[Y_t - 5][Y_{t+2} - 5] = E(e_t + e_{t-1} + e_{t-2})(e_{t+2} + e_{t+1} + e_t)$$
$$= E(e_t^2) = 1$$

ل $k > 2$ تكون مؤشرات ال $e's$ في القـوس الثـاني جميعهـا مختلفـة عـن تلـك الـتي بالقوس الأول وبالتالي يكون التغاير الذاتي ٠. دالة التغاير الذاتي إذن

$$\gamma_k = \begin{cases} 3 & k = 0 \\ 2 & k = 1 \\ 1 & k = 2 \\ 0 & k > 2 \end{cases}$$

دالة الارتباط الذاتي يمكن الحصول عليها من هذه الدالة بالقسمة على γ_0:

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{2}{3} & k = 1 \\ \frac{1}{3} & k = 2 \\ 0 & k > 2 \end{cases}$$

دالة كثافة الطيف :

بتعويض قيم ρ_k في

$$K(f) = 2\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos 2\pi fk\right\}$$
$$= 2\left\{1 + \frac{4}{3}\cos 2\pi f + \frac{2}{3}\cos 4\pi f\right\}$$

مـع ملاحظـة أن حـدود المجمـوع المقابلـة لأى $k > 2$ تتلاشـى لأن $\rho_k = 0$ ل $k > 2$

الباب الرابع

طرق التمهيد

Smoothing methods

٤,١ مقدمة

في الباب الثاني والثالث تحدثنا عن طرق تساعد في فهم طبيعة السلسلة الزمنية من خلال عزل وقياس (ما يمكن قياسه من) التغيرات المختلفة التي تؤثر فيها ، أو اكتشاف أي موجات تحتويها وتحديد أطوالها وتكرارها. ويمثل ذلك أحد الأهداف الأساسية لتحليل السلسلة الزمنية. هدف آخر لا يقل أهمية وراء تحليل السلسلة الزمنية هو الاستفادة من القيم التاريخية بها للتنبؤ بالقيم المستقبلية. وفي هذا الباب والبابين التاليين له سنتعرف على بعض الطرق التي تستخدم في التنبؤ من السلسلة الزمنية. والطرق التي سيتم تناولها هي طرق التمهيد والطرق المستندة إلى مجموعة النماذج التي تدخل فيما يعرف بمنهجية بوكس – جنكينز. وتقوم طرق التمهيد بصفة عامة باستخدام أنواع مختلفة من المتوسطات بهدف تقليص الفوارق بين القيم الكبيرة والقيم الصغيرة في السلسلة الزمنية للوصول لسلسلة جديدة تكون قيمها أقرب لبعضها – أي أكثر تمهيداً – من قيم السلسلة الأصلية. والفكرة الأساسية وراء ذلك ، هي أن التمهيد بقضائه على نسبة كبيرة من التغيرات قصيرة الأمد (كالتغيرات العشوائية والموسمية) يتيح الفرصة لإبراز الاتجاه العام للسلسلة الزمنية مما يمكن من التنبؤ بقيمها المستقبلية في ضوئه. ورغم أن طرق التمهيد لا تستند إلى نظرية إحصائية (مثلها في ذلك مثل طرق التجزئة) وتعتمد أساساً على الحدس والتجربة والمنطق ، إلا أنها أثبتت نجاحاً خاصة في التنبؤ قصير الأمد. وتتميز طرق التمهيد عموماً بأنها تكيفيه **adaptive** بمعنى أن التنبؤ يعدل مع ظهور كل قيمة جديدة مما يجعله مبنياً على صيغة تتطور باستمرار بدلاً من الاعتماد على صيغة أو معادلة ثابتة لا تستوعب ما يتوفر من معلومات جديدة عن السلسلة مع مرور الزمن أولا تستوعبها بدرجة كافية.

٤,٢ طريقة المتوسط The average method

أفرض أن لدينا قيم لسلسلة زمنية حتى الزمن t :

$$Y_1, Y_2, ..., Y_t$$

ونرغب في التنبؤ بالقيمة في الزمن $t+1$ ، والذي نرمز له ب F_{t+1} .

إذا لم تكن السلسلة تحوى اتجاهاً عاماً أو تغيرات موسمية ، وتبدو قيمها وكأنها تتشتت عشوائياً حول قيمة وسطى ثابتة ، فإنه يبدو منطقياً استخدام كتنبؤ بالقيمة في الزمن $t+1$ ، مقدر لهذه القيمة الوسطى . وتستخدم طريقة المتوسط متوسط قيم السلسلة حتى الزمن t كتنبؤ أى:

$$F_{t+1} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} Y_i$$

فإذا توفرت بعد ذلك – في الزمن $t+1$ – القيمة الفعلية Y_{t+1} فإن التنبؤ بالقيمة في الزمن $t+2$ يكون :

$$F_{t+1} = \frac{1}{t+1} \sum_{i=1}^{t+1} Y_i$$

وهكذا. وواضح أن هذه الطريقة ليست مناسبة إذا كانت السلسلة الزمنية خاضعة لتغيرات مع الزمن لأنها تعطي نفس الوزن (مثلاً $\frac{1}{t+1}$) للقيم حديثها وقديمها.

٤,٣ طريقة المتوسط المتحرك Moving average method

كمحاولة للتخلص من تأثير القيم القديمة على المتوسط ، ووضع احتمال وجود اتجاه عام في السلسلة في الاعتبار ، يتم أحياناً استخدام طريقة المتوسط المتحرك . وفي أبسط صورها وهي المتوسط المتحرك المفرد **single moving average** والتي نقوم فيها بحساب متوسطات مجموعات متتالية من قيم السلسلة ، القيم في كل مجموعة عبارة عن القيم في المجموعة السابقة لها بعد حذف أقدم قيمة وإضافة القيمة التي تليها. ويستخدم المتوسط المتحرك في الزمن **t** كتنبؤ بالزمن $t+1$.

فإذا بدأنا مثلاً بالقيم: $Y_1, Y_2, ..., Y_t$ فإن التنبؤ بالقيمة في الزمن $t+1$ يكون:

$$F_{t+1} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} Y_i$$

ويتطابق في هذه الحالة مع التنبؤ بطريقة المتوسط . وبمجرد ظهور القيمة الفعلية في الزمن $t+1$ ، Y_{t+1} يكون التنبؤ في الزمن $t+2$:

$$F_{t+2} = \frac{1}{t}\sum_{i=2}^{t+1} Y_i$$

لاحظ أن المجموع في F_{t+2} حذفت منه القيمة الأقدم في F_{t+1} وهى Y_1 وأضيفت القيمة التي تلي آخر قيمة فيه Y_t وهي Y_{t+1}. كذلك

$$F_{t+3} = \frac{1}{t}\sum_{i=3}^{t+2} Y_i$$

وهكذا نتخلص من القيم القديمة الواحدة تلو الأخرى ، ويجدد بذلك التنبؤ ونحن ننتقل مع الزمن . ولكن كيف يتم التجديد أو التعديل ؟

لرؤية ذلك نضع :

$$F_{t+2} = \frac{1}{t}\sum_{i=2}^{t+1} Y_i$$

$$= \frac{1}{t}\left(\sum_{i=2}^{t+1} Y_i + Y_1 - Y_1\right)$$

$$= \frac{1}{t}\left(\sum_{i=1}^{t} Y_i - Y_1 + Y_{t+1}\right)$$

$$= F_{t+1} + \frac{1}{t}\left(Y_{t+1} - Y_1\right) \qquad ...(٤ ,١)$$

أي أن التعديل الذي يتم في كل تنبؤ هو إضافة الفرق بين القيمة التي أضيفت والقيمة التي حذفت مضروباً في $\frac{1}{t}$.

ويمكن أن نختار أي رتبة مناسبة للمتوسط المتحرك . فإذا اخترنا مثلاً متوسط متحرك برتبة n فإن التنبؤ في الزمن $t+1$ يكون من (٤ ,١) :

$$F_{t+1} = F_t + \frac{1}{n}\left(Y_t - Y_{t-n}\right) \quad \text{... (٤ ,٢)}$$

طريقة المتوسط المتحرك المفرد ليست هي الطريقة الوحيدة المبنية على فكرة المتوسطات المتحركة. وفي الواقع هناك عدة أشكال للمتوسطات المتحركة مقترحة في الأدبيات. بصفة خاصة ، إذا كان تطبيق المتوسط المفرد على السلسلة الزمنية يؤدي لنوع من الخطأ المنتظم (اتجاه عام خطي يتزايد بمقدار ثابت) فإن طريقة المتوسطات المتحركة الخطية Linear moving average التي تتطلب إيجاد متوسط متحرك مضاعف (متوسط متحرك لسلسلة المتوسط المتحرك المفرد) يمكن أن نستخدم لتحسين التنبؤ.

٤ , ٤ طريقة المتوسطات المتحركة الخطية Linear moving averages

أفرض أن لدينا سلسلة زمنية خاضعة لاتجاه عام تتزايد فيه القيم بمقدار ثابت . أفرض أيضاً أننا نريد أن نستخدم متوسط متحرك (مفرد) بطول فترة ٣. تتطلب طريقة المتوسطات المتحركة الخطية إتباع الخطوات التالية :

١. نحسب متوسط القيم الثلاث الأولي ونضعه أمام القيمة الثالثة. لاحظ أن هذا يختلف عما كنا نفعله في الباب الثاني حين كنا نضع المتوسط المتحرك أمام القيمة التي في الوسط أو عندما نستخدمه كتنبؤ فنضعه أمام القيمة الرابعة.

نرمز للمتوسط المتحرك ، والذي هو متوسط متحرك مفرد ، أمام القيمة رقم t (أو الزمن t) ب S'_t. لاحظ أن

$$S'_t = \frac{1}{3}\sum_{i=t-3+1}^{t} Y_i$$

٢. نحسب متوسط متحرك مضاعف (أي متوسط متحرك لقيم المتوسط المتحرك المفرد S'_t) برتبة ٣ أيضاً، ونضع كل متوسط متحرك مضاعف أمام آخر متوسط متحرك مفرد دخل في حسابه.

نرمز للمتوسط المضاعف مقابل الزمن t ب S''_t حيث

$$S''_t = \frac{1}{3} \sum_{i=t-3+1}^{t} S'_i$$

٣. التنبؤ لـm فترة زمنية للأمام إذا كنا نقف في الزمن t يحسب من

$$F_{t+m} = a_t + b_t m$$

حيث:

$$a_t = S'_t + \left(S'_t - S''_t\right)$$

و $$b_t = \frac{2}{3-1}\left(S'_t - S''_t\right)$$

يمثل الاتجاه العام.

وفي الحالة العامة عند استخدام متوسطات متحركة برتبة r تكون هذه المعادلات بالترتيب

$$F_{t+m} = a_t + b_t m$$

$$a_t = S'_t + \left(S'_t - S''_t\right)$$

$$b_t = \frac{2}{r-1}\left(S'_t - S''_t\right)$$

حيث

$$S''_t = \frac{1}{r} \sum_{i=t-r+1}^{t} S'_i \quad \text{و} \quad S'_t = \frac{1}{r} \sum_{i=t-r+1}^{t} Y_i$$

والسبب في وجود العامل $\frac{2}{r-1}$ عند حساب مكوّن الاتجاه العام b_t هو أن المتوسط المتحرك ذو الرتبة r $\left(S'_t\right)$ من المفروض أن يوضع (كما ذكرنا في الباب الثاني) أمام القيمة التي في الوسط أي أمام الفترة الزمنية $\frac{r+1}{2}$ (في حالة أول متوسط متحرك) بينما وضع في الواقع أمام الفترة r . إذن هناك فرق يساوي $r - \frac{r+1}{2} = \frac{r-1}{2}$. نفس الفرق ينطبق على المتوسط المتحرك المضاعف

(S_t'') وبالتالي فإن الفرق (الاتجاه العام) $S_t' - S_t''$ يمثـل الفـرق ل $\frac{r-1}{2}$ وحـدة زمنية مما يعني أن الاتجاه العام للوحدة الزمنية الواحدة هو $\frac{2}{r-1}(S_t' - S'')$.

المثال التالي يوضح أنه إذا كانت السلسلة الزمنية خاضعة لاتجاه عام ثابت فإن طريقـة المتوسطات المتحركة الخطية تؤدي للتنبؤ بدون خطأ (وبالتالي تقلل الخطأ إذا كان شبه ثابت).

مثال (١ , ٤)

جدول (١ , ٤) يوضح سلسلة افتراضية يتزايـد فيهـا الاتجـاه العـام بمقـدار ثابـت (٢) والحسابات المطلوبة للتنبؤ بطريقة المتوسطات المتحركة الخطية :

الزمن t	السلسلة Y_t	M(٣) (S_t')	(3×3) (S_t'')	$-S_t''$	$S_t' + (S_t' - S_t'')$	$= \frac{2}{3-1}(S_t' - S_t'')$	$= a_t + b_t$
١	٤						
٢	٦						
٣	٨	٦					
٤	١٠	٨					
٥	١٢	١٠	٨	٢	١٢	٢	
٦	١٤	١٢	١٠	٢	١٤	٢	١٤
٧	١٦	١٤	١٢	٢	١٦	٢	١٦

جدول (١ , ٤)

نجد من الجدول أن التنبؤ بالقيمة في الزمن $t=6$ إذا كنا في الزمن ٥ :

$$F_6 = S_5' + (S_5' - S_5'') + \frac{2}{3-1}(S_5' - S_5'')$$

$$= 10 + 2 + 2 = 14$$

وهي تتطابق مع القيمة الفعلية $Y_6 = 14$ مما يعني أن التنبؤ تم بدون خطأ.

وكذلك للتنبؤ F_7 . أما إذا اكتفينا بالمتوسط المتحرك المفرد (أي استخدمنا مثلاً $5''_5$ لتنبؤ ب Y_6 فإن خطأ منتظم بمقدار ٤ كان سيحدث عن التنبؤ.

٤ , ٥ طرق التمهيد الأسى Exponential smoothing methods

لقد وجدنا أن طريقة المتوسط تعطـي أوزانـاً متسـاوية لقـيم السلسـلة قـديمها وحديثها ، وأنها بذلك لا تناسب السلاسل الزمنية التي تخضع لتغيرات مع الزمن. وفي طريقة المتوسطات المتحركة محاولة لمعالجة المشكلة من خلال التخلص من
القيم القديمة الواحدة تلو الأخرى إذ تسقط أقدم القـيم في المتوسـط المتحـرك السـابق وتستبدل بأحدث قيمة عند حساب المتوسط المتحرك الجديد .

طرق التمهيد الأسى أيضاً تحاول التركيز على القيم الأحدث ولكن عن طريق منح أوزان مختلفة لبيانات السلسلة الزمنية بحيث يتناقص وزن القيمة كلما قدمت. وقد وجد أن هذه الطرق تعطي نتائج جيدة عندما تكون السلسلة الزمنية عرضـه لـتغيرات بطيئة . في مثل هذه الحالة من الضروري استخدام طريقة للتنبـؤ تنطـوي علـي تجديـد وتطوير التنبؤ كلما ظهرت قيمة جديدة ، إذا كـان لهـا أن تأخـذ أحـدث الـتغيرات في السلسلة الزمنية في الاعتبار.

وكما هو الحال في الطرق المبنية على المتوسطات المتحركة ، توجد طرق عديدة للتمهيد الأسى. وسنتناول ثلاث من هذه الطرق وهي طرق التمهيـد الأسـى المفـرد ، التمهيد الأسى الثنائي لهولت والتمهيـد الأسـى الثلاثـي لـوينترز . وهـذه هـي طـرق التمهيد الأسى الأكثر شهرة.

١ , ٥ , ٤ التمهيد الأسى المفرد Single exponential smoothing

إذا كانت السلسلة الزمنية غير خاضعة لتأثير اتجاه عام أو تـأثير مـوسمي ، فيمكن اعتبار قيمها ناتجة عن متوسط عام مضافاً إليه خطأ عشوائي تختلف قيمتـه مـن زمن لآخر. ويبدو منطقياً في هذه الحالة استخدام مقدر مناسب لهذا المتوسط العام عند التنبؤ بقيمة جديدة للسلسلة. وبما أن المتوسط يمكن أن يتغير ببطء فإن التمهيد الأسـى يقوم بإعطاء وزن أكبر للقيم الأحدث في السلسلة عند حسـاب المقـدر كمـا أنـه يجـدد

ويحدّث المقدر كلما ظهرت قيمة جديدة في السلسلة الزمنية. وتأخذ المعادلة الأساسية للتمهيد الأسى المفرد الشكل :

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + (1-\alpha)F_t \qquad ...(٤,٣)$$

حيث F_t التنبؤ بالقيمة في الزمن t إذا كنا في الزمن $t-1$ ، Y_t القيمة الفعلية في السلسلة الزمنية في الزمن t . أما α والتي تتراوح قيمتها بين ٠ و١ فهي ثابت تمهيد **smoothing constant** . وتحدد قيمة α عادة بمحاولة قيم مختلفة ثم اختيار القيمة التي تعطي أقل مجموع (أو متوسط) مربعات خطأ .

بعض البرمجيات تختار قيم ل α بين 0.01 و 0.3 بقفزات 0.01. أي نقوم بتجربة 0.01 ، 0.02، 0.03،... حتى ٠,٣. لاحظ أنه كلما كانت التغييرات في السلسلة كبيرة كلما احتجنا ل α أكبر. لاحظ كذلك الشبة بين (٤,٣) و (٤,٢).

وتتميز المعادلة (٤,٣) بأننا لا نحتاج للتنبؤ بقيمة جديدة ، سوى الاحتفاظ بآخر قيمة مشاهدة وآخر تنبؤ وتحديد قيمة مناسبة لثابت التمهيد α. ولكن ماذا يفعل التمهيد الأسى تحديداً ؟

إذا كتبنا (٤,٣) بالشكل

$$\begin{aligned} F_{t+1} &= F_t + \alpha(Y_t - F_t) \\ &= F_t + \alpha(\delta_t) \end{aligned}$$

حيث δ_t خطأ التنبؤ في الزمن t ، نتبين أن ما يفعله التمهيد الأسى عند التنبؤ بالقيمة في الزمن $t+1$ هو أن يأخذ التنبؤ السابق F_t ويصححه مستهدياً بخطأ التنبؤ في الزمن t δ_t. ويتم التصحيح في اتجاه معاكس لاتجاه الخطأ. فمثلاً إذا كان التنبؤ في الزمن t أكبر من الواقع فإن الخطأ $(Y_t - F_t)$ (والذي سيكون سالباً في هذه الحالة) سيضاف بعد ضربه في α إلى التنبؤ السابق F_t فيكون التنبؤ الجديد F_{t+1} أقل من F_t. وهذه هو التصحيح. أما إذا كان التنبؤ في الزمن t أقل من الواقع فإن إضافة الخطأ (الذي سيكون موجباً) بعد ضربه في α ل F_t سيقلل من الخطأ في التنبؤ الجديد. هذا يعني أن التمهيد الأسى يتضمن نوعاً من التغذية الاسترجاعية السلبية.

من ناحية أخرى بتكرار استخدام القاعدة في (٣,٤) نجد :

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + (1-\alpha)(\alpha Y_{t-1} + (1-\alpha)F_{t-1})$$

$$= \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha)Y_{t-1} + (1-\alpha)^2 F_{t-1}$$

$$= \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha)Y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 Y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 Y_{t-3} + \ldots$$

$$\ldots + \alpha(1-\alpha)^{n-1} Y_{t-(n-1)} + \ldots + (1-\alpha)^n F_{t-(n-1)}$$

وبما أن α كسر تتراوح قيمته بين الصفر والواحد فواضح أن التمهيد الأسى يعطي وزناً أقل للقيم الأقدم . في الواقع فإن تناقص الأوزان يتبع نمطاً أسياً ولهذا التسمية.

ليمكن استخدام المعادلة (٣,٤) في التنبؤ نحتاج لنقطة ننطلق منها وتحديداً نحتاج لقيمة ل F_1 التنبؤ بالقيمة في الزمن ١ إذ لا يمكننا استخدام (٣,٤) لإيجاد F_1 لعدم وجود قيمة Y في الزمن ٠. أثبتت التجارب أنه في التمهيد الأسى عموماً يمكن استخدام متوسط نصف قيم السلسلة كتقدير ل F_1 وأنه في التمهيد الأسى المفرد يمكن الاكتفاء بأخذ متوسط القيم ال٦ الأولي أي نأخذ :

$$F_1 = \frac{1}{6}\sum_{t=1}^{6} Y_t$$

بعد إيجاد قيمة ل F_1 وتحديد قيمة مناسبة أو مبدئية ل α يسير التنبؤ في التمهيد الأسى المفرد كما يلي : في نهاية الفترة $t-1$ يكون التنبؤ بالقيمة في الفترة t أي F_t:

$$F_t = \alpha Y_{t-1} + (1-\alpha)F_{t-1}$$

وبمجرد ظهور القيمة الفعلية في الزمن t أي Y_t نستفيد منها لتحسين التنبؤ في الزمن $t+1$ والذي يكون :

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + (1-\alpha)F_t$$ وهكذا.

مثال (٢ , ٤)

الجدول التالي يوضح المبيعات الشهرية (بوحدات معينة) لنوع من اللمبـات الكهربائية بمتجر كبير في سنة ما ، والتنبؤ بشهر للأمام وأخطـاء التنبـؤ. اسـتخدمت في التنبؤ (اختياراً) $\alpha = 0.02$.

خطأ التنبؤ e_t	التنبؤ F_t	المبيعات Y_t	رقم الشهر (t)
-1.00	٢٠,٠٠	١٩	١
-0.98	١٩,٩٨	١٩	٢
-1.96	١٩,٩٦	١٨	٣
$+0.08$	١٩,٩٢	٢٠	٤
$+2.08$	١٩,٩٢	٢٢	٥
$+2.04$	١٩,٩٦	٢٢	٦
٠	٢٠,٠٠	٢٠	٧
$+3.00$	٢٠,٠٠	٢٣	٨
$+1.90$	٢٠,١٠	٢٢	٩
$+4.90$	٢٠,١٠	٢٥	١٠
$+3.80$	٢٠,٢	٢٤	١١
$+3.70$	٢٠,٣	٢٤	١٢

جدول (٢ , ٤)

العمود الثالث بجدول (٢ , ٤) يعطي التنبؤ لكل شهر من الشهر السـابق لـه. للبـدء في التنبؤ نحتاج لقيمة ل F_1 وقد قدرت هذه القيمة من القيم ال٦ الأولي :

$$F_1 = \frac{19+19+18+20+22+22}{6} = 20$$

للتنبؤ بالقيمة في الشهر ٢ من الشهر ١ نحسب باستخدام (٣ , ٤) وبأخذ $\alpha = 0.02$:

$$F_2 = 0.02 \times 19 + 0.98 \times 20 = 19.98$$

وبظهور القيمة الفعلية في الشهر ٢ أي Y_2 نجد أن الخطأ في هذا التنبؤ كان:

$$e_2 = 19 - 19.98 = -0.98$$

وبالتالي لتحديث هذا التنبؤ ليعطي تنبؤ من الشهر ٢ بالقيمة في الشهر ٣ نحسب:

$$F_3 = 0.02 \times 19 + 0.98 \times 19.98 = 19.96$$

ولأن القيمة الفعلية في ذلك الشهر هي ١٨ فهناك خطأ تنبؤ -1.96

وتستمر عملية التنبؤ على هذا المنوال لنحصل على القيم في العمودين الأخيرين.

إذا أردنا أن نتأكد من أن اختيارنا ل $\alpha = 0.02$ كان سليماً نحاول قيم مختلفة ل α ، نحسب أخطاء التنبؤ في كل حالة وبالتالي متوسط مربعات الخطأ ، وتكون قيمة α التي تعطي أقل متوسط مربعات خطأ هي الأنسب.

فترة ثقة للتنبؤ

يمكن أيضاً إنشاء فترة ثقة تقريبية للتنبؤ بالقيمة في الزمن $t+1$ من الزمن **t** .

فترة الثقة بدرجة ثقة $(1-\beta)\times 100\,\%$ للتنبؤ F_{t+1} من الزمن **t** نأخذ الشكل:

$$F_{t+1} \pm Z_{\frac{\beta}{2}} 1.25 \delta(t+1)$$

حيث :

$$\delta(t+1) = \frac{\sum_{t=1}^{t+1} |Y_t - F_t|}{t+1}$$

و $Z_{\frac{\beta}{2}}$ القيمة في التوزيع الطبيعي المعياري التي تليها مساحة $\frac{\beta}{2}$.

مثال (٤,٣)

مستخدماً بيانات مثال (٤,٢) أنشئ فترة ثقة بدرجة ثقة ٩٥٪ للتنبؤ في الشهر ٦ . هنا :

$\beta = 0.05$ و $Z_{\frac{\beta}{2}} = 1.96$ من جدول التوزيع الطبيعي .

كذلك من جدول (٢ , ٤) نجد :

$$F_6 + 19.96$$

$$\delta(6) = \frac{1}{6}\left[|19-20| + |19-19.98| + |18-19.96| + |20-19.92| + |22-19.92|\right.$$

$$\left.|22-19.96|\right] = \frac{1}{6}\left[1.0 + 0.98 + 1.96 + 0.08 + 2.08 + 2.04\right]$$

$$= \frac{8.14}{6} = 1.36$$

وبالتالي فترة الثقة :

$$19.96 \pm 1.96 \times 1.25 \times 1.36$$

أو 19.96 ± 3.33

أو $(16.63, 23.29)$

وتفسر تلك الفترة بأننا على ثقة قدرها ٩٥٪ أن القيمة الحقيقية المتنبأ بها تـراوح بـين ١٦,٦٣ و ٢٣,٢٩.

إشارة التتبع **Tracking signal**

قد يتغير معدل التغير في السلسلة الزمنيـة مـع مـرور الوقـت ، بحيـث يجعلنـا نتساءل : هـل اختيارنـا لقيمـة α لا يـزال مناسـباً ؟ بمعـني آخـر ، هـل لازال التنبـؤ باستخدام تلك القيمة ل α يعطي تنبؤات بدرجة معقولة من الصحة ؟.

تساعدنا إشارة التتبع في الإجابة على هذا السؤال.

أفرض أن السلسلة الزمنية عندما اسـتخدمت فيهـا القيمـة α للتنبـؤ كانـت أخطاء التنبؤ $e_t(\alpha)$ حيث $t = 1,...,n$. تعرف إشارة التتبع **TS** كما يلي :

$$TS = \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t(\alpha)}{\sum_{t=1}^{n} |e_t(\alpha)| \big/ n}$$

وتبرير ذلك ، هو أنه إذا كانت طريقة التنبؤ تسير بشكل صحيح فإن عدد الأخطاء السالبة سيساوي تقريباً عدد الموجبة وستكون الأخطاء عددياً متقاربة في القيمة. في هذه الحالة يتوقع أن تكون قيمة البسط صفراً. وعليه فإن القيمة الكبيرة لـTS تعني أن طريقة التنبؤ – ومن خلالها α - أدت لأخطاء تنبؤ معظمها سالب أو معظمها موجب. بمعني آخر القيم التنبؤية معظمها أكبر من القيم الفعلية أو معظمها أصغر منها. ولهذا فإن القيم الكبيرة لـTS تدفعنا للشك بأن طريقة التنبؤ وبالتالي اختيار α لم تعد سليمة. ويحدد الكبر حسب حد ضبط معين **k** . وعادة تؤخذ **k** بين ٤ و٦.

مثال (٤ , ٤)

في مثال (٢ , ٤) نجد من العمود الأخير بجدول (٢ , ٤) :

$$\sum_{t=1}^{12} e_t = -1.00 + (-.98) + \ldots + 3.70 = 17.56$$

$$\frac{\sum_{t=1}^{12} |e_t|}{12} = [|1-1| + |-0.98| + \ldots + |3.70|] \ /12 = \frac{25.44}{12} = 2.12$$

وبالتالي تكون إشارة التتبع :

$$TS = \frac{17.56}{2.12} = 8.28$$

وهى كبيرة مما يعني أن طريقة التنبؤ لم تعد تعطي نتائج صحيحة بمواصلة استخدام نفس قيمة α.

يفضل كثير من العاملين في مجال التنبؤ استخدام ثابت تمهيد يتغير تلقائياً مع الزمن بهدف جعل طريقة التنبؤ أكثر تكيفاً مع التغيرات التي تطرأ على السلسلة . وهناك عده طرق لتحقيق ذلك تسمي طرق السيطرة التكيفية **adaptive control procedures**. من هذه الطرق طريقة تشاو ((Chow(١٩٦٥) تتطلب هذه الطريقة باختصار ما يلى : إذا كان ثابت التمهيد هو α يستحدث ثابتي تمهيد

آخرين $\alpha+\delta$ و $\alpha-\delta$ (يقترح تشـاو أن تكـون $\delta=0.05$). بعـد ذلـك يطبق التمهيد الأسى على السلسلة الزمنية باستخدام كل من الثوابت الثلاثة على حده. وفى كل حالة يحسب المتوسط المطلق لانحرافات أخطاء التنبؤ حتى الزمن t. فإذا كان هذا المقدار أقل في الحالة α يستمر استخدامها عدا ذلك يستخدم الثابت من الاثـنين الآخرين الذي يعطى أقل متوسط مطلق لانحرافات أخطاء التنبؤ.

٤ , ٥ , ٢ التمهيد الأسى المزدوج لهولت Holt's double-exponential soothing

هذه الطريقة مناسبة في الحالة التي تكون فيها السلسلة الزمنية خاضعة لاتجاه عام. ويتم التنبؤ فيها باستخدام ثابتي تمهيد α و γ لهذا تسمي أحياناً طريقة هولت ذات المعلمين **Holt's two-parameter method**.

وترتكز الطريقة على المعادلات الثلاث التالية:

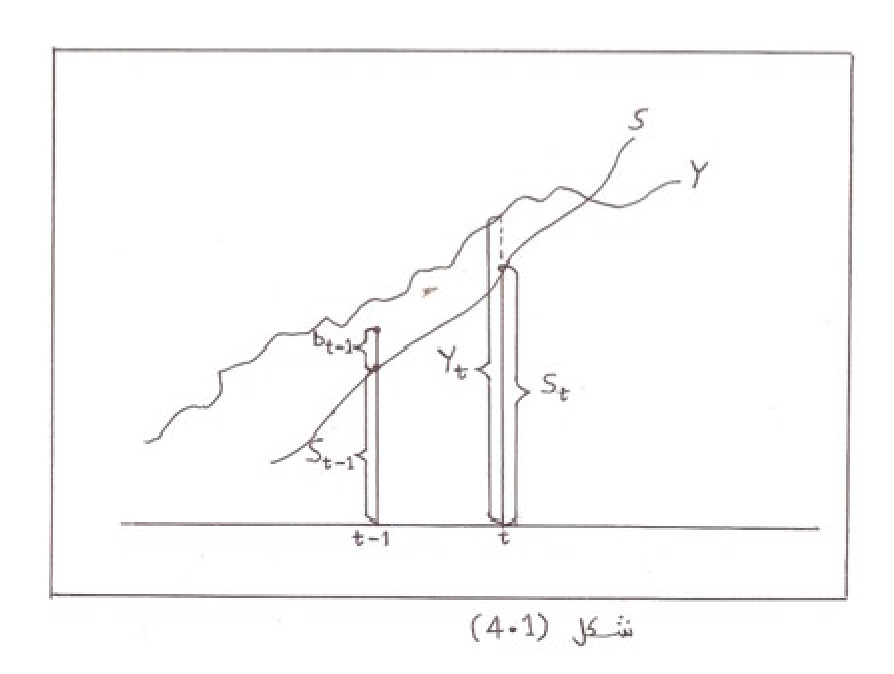
$$S_t=\alpha Y_t+(1-\alpha)(S_{t-1}+b_{t-1}) \qquad \dots (٤ , ٤)$$

$$b_t=\gamma(S_t-S_{t-1})+(1+\gamma)b_{t-1} \qquad \dots (٤ , ٥)$$

$$F_{t+m}=S_t+b_t m \qquad \dots (٤ , ٦)$$

حيث تمثل **S** قيمة ممهدة ، **b** اتجاه عام و **m** عـدد الفـترات المـراد التنبـؤ بهـا للأمام. ومن المفيد للقارئ أن يتذكر أن كلمة تمهيد تعني ببساطة عمليـة أخـذ متوسـط بشكل ما . وكل معادلات التمهيد الأسى تتضمن أخذ متوسط (مرجح) لتمهيد قـيم ما.

في المعادلة (٤ , ٤) يتم تمهيد قيم السلسلة للحصول على قيم ممهدة **S** بدلاً عن القيم الأصلية Y ليمكن بعد ذلك استخدام هذه القيم (الـتي يتوقـع أن تمثـل الـنمط العام لسير السلسلة) في التنبؤ من خـلال المعادلـة (٤ , ٦). القيمـة الممهـدة في الـزمن **t**، S_t يتم الحصول عليها بتعديل القيمة الممهدة في الزمن السابق S_{t-1} بإضافة الاتجاه العام في الزمن $t-1$ ، b_{t-1} إليها لينعكس تأثيره عليها زيادة أو نقصاناً فتقترب بذلك من القيمة الفعلية في الـزمن **t** أى Y_t. القيمـة الممهـدة في الـزمن **t** تؤخـذ بعـد ذلـك كوسط مرجح بالأوزان α و $1-\alpha$ لـ Y_t و $S_{t-1}+b_{t-1}$. أنظر شكل (٤ , ١)



شكل (4-1)

الاتجاه العام **b** بدوره قد يتغير مع الزمن. لذلك نحتاج لأن ننظر إليه كسلسلة زمنية ونقوم بتمهيده حتى يمكن تبين نمطه العام وتقدير قيمته في كل فترة زمنية.

وإذا توفرت القيم الممهدة في الزمن **t** والزمن $t-1$ أى S_t و S_{t-1} فإن أفضل تقدير للاتجاه العام في الزمن $t-1$ يكون الفرق بينهما $S_t - S_{t-1}$ فإذا كان الاتجاه العام يتجه نحو الزيادة فإن هذا الفرق يكون موجباً وإذا كان نحو النقصان فإنه يكون سالباً ولهذا فمن المنطقي أن يمثل تقديراً للاتجاه العام في الزمن $t-1$. وتقوم المعادلة (٤ ,٥) التي مهمتها تمهيد الاتجاه العام ، بأخذ الاتجاه العام في الزمن **t** أى b_t كوسط مرجح بين هذا التقدير والاتجاه العام في الزمن السابق b_{t-1}.

إذا كتبنا المعادلة (٤ ,٥) التي هى في الواقع معادلة تمهيد أسى مفرد مطبقة على الاتجاه العام – بالشكل: $b_t = b_{t-1} + \gamma\big((S_t - S_{t-1}) - b_{t-1}\big)$

نرى أن الاتجاه العام في الزمن **t** يتم الحصول عليه بتعديل الاتجاه العام السابق b_{t-1} بإضافة الفرق بين أحدث تقدير $S_t - S_{t-1}$ و b_{t-1} (بعد الضرب في γ). فإذا كان b_{t-1} أقل من $S_t - S_{t-1}$ تتم رفع قيمته بإضافة القيمة الموجبة $S_t - S_{t-1} - b_{t-1}$

إليه وإذا كان أكبر تخفض قيمته بإضافة القيمة السالبة. وبهذا يحدَّث الاتجاه العام ويطور مع كل تمهيد جديد.

أما المعادلة (٦ , ٤) فتستخدم للتنبؤ من الزمن t لـm وحده زمنية للأمام. وليمكن استخدام المعادلات (٤ , ٤)-(٦ , ٤) في التنبؤ لابد من الحصول على قيم ل S_1 و b_1 إذا لا توجد قيم ل S_0 و b_0 يمكن استخدامها للحصول عليهما من (٤ , ٤) و (٥ , ٤). وبالتالي لا يمكن الانطلاق للتنبؤ في الفترات اللاحقة . بالنسبة ل S_1 جرى العرف على أخذ $S_1 = Y_1$. أما بالنسبة ل b_1 فهناك عدة طرق منها :

$$b_1 = \frac{(Y_2 - Y_1) + (Y_3 - Y_2) + (Y_4 - Y_3)}{3} \quad \text{و} \quad b_1 = Y_2 - Y_1$$

وبمجرد تحديد قيمة ل b_1 و S_1 يمكن إجراء التنبؤ للفترات التالية كما يوضح المثال (٥ , ٤) أدناه. لاحظ أنه لا يوجد تنبؤ في الفترات ١ و ٢ لأننا افترضنا أن قيمها Y_1 و Y_2 معروفة واستخدمت في تقدير S_1 و b_1.

مثال (٥ , ٤)

العمود الثاني بجدول (٣ , ٤) يبين المبيعات السنوية لشركة خلال ٦ سنوات. مستخدماً $\alpha = 0.2$ و $\gamma = 0.3$ تنبأ بالقيم في السنوات ١٩٨٦-١٩٨٩.

رقم السنة (t)	السنة	المبيعات Y_t بملايين الجنيهات	S_t	b_t	F_t	خطأ التنبؤ e_t	التنبؤ بالتمهيد الأسى المفرد	الخطأ في التمهيد المفرد
١	١٩٨٤	١٤	١٤,٠	٢				
٢	١٩٨٥	١٦	١٦,٠	٢				
٣	١٩٨٦	٢٠	١٨,٤٠	٢,١٢	١٨	٢,٠	١٨,٤٥	١,٥٥
٤	١٩٨٧	٢٤	٢١,٢١	٢,٣٣	٢٠,٥٢	٣,٤٨	١٨,٧٦	٥,٢٤
٥	١٩٨٨	٢٢	٢٣,٢٣	٢,٢٤	٢٣,٥٤	-١,٥٤	١٩,٨٠	٢,٢
٦	١٩٨٩	٢٦	٢٥,٥٨	٢,٢٧	٢٥,٤٧	٠,٥٣	٢٠,٢٤	٥,٧٦

جدول (٣ , ٤)

سنأخذ $S_1 = Y_1 = 14$ و $b_1 = Y_2 - Y_1 = 2$.

من (٤ , ٤) و (٥ , ٤) نجد بالترتيب للسنة الثانية :

$$S_2 = \alpha Y_2 + (1-\alpha)(S_1 + b_1)$$
$$= 0.2 \times 16 + 0.8(14-2) = 16$$

و
$$b_2 = \gamma(S_2 - S_1) + (1-\gamma)b_1$$
$$= 0.3(16-14) + 0.7 \times 2 = 2$$

في السنة ٣ نحسب المقادير :

$$S_3 = 0.2Y_3 + (1-0.2)(S_2 + b_2)$$
$$= 0.2 \times 20 + 0.8(16+2) = 18.4$$
$$b_3 = 0.3(18.4-16) + 0.7 \times 2 = 2.12$$

التنبؤ في السنة ٣ باستخدام (٦ , ٤) من السنة ٢ :

$$F_3 = S_2 + b_2 \times (1) = 16 + 2 \times 1 = 18$$

في السنة ٤ نحسب

$$S_4 = 0.2 \times 24 + 0.8(18.4 + 2.12) = 21.21$$
$$b_4 = 0.3(21.21 - 18.4) + 0.7 \times 2.12 = 2.33$$

التنبؤ في السنة ٤ من السنة ٣ :

$$F_4 = S_3 + b_3 \times (1) = 18.4 + 2.12 \times 1 = 20.52$$

وهكذا نجد بقية القيم في العمود الرابع والخامس والسادس.

ويوضح العمود قبل الأخير التنبؤ بالتمهيد الأسى المفـرد بأخـذ F_1 تسـاوي متوسـط القيم ال٦ وهو ٢٠,٣٣ وبأخذ $\alpha = 0.2$. وبمقارنة أخطاء التنبؤ في حالـة التمهيـد الأسى المفرد (العمود الأخير) بنظيرتها في التمهيـد المـزدوج نلاحـظ أن الأخطـاء في التمهيد المزدوج أقل كثيراً (باستثناء حالة واحدة) منها في التمهيد المفرد. وهذا لـيس بمستغرب لأن السلسلة المعطاة تحوى اتجاهاً عاماً وهو ما لا يعالج أثر وجـوده التمهيـد المفرد.

٤,٥,٣ التمهيد الأسى الثلاثي لوينترز

Winter's three-parameter exponential smoothing method

عندما يكون بالسلسلة الزمنية تغيرات موسمية فإن الطرق السابقة لا يتوقع أن تؤدي لتنبؤ يقترب من الواقع لأنها لا تضع في الاعتبار التغيرات الموسمية. ممكن بالطبع التخلص من التغيرات الموسمية بطرق مثل تلك التي ذكرناها في الباب الثاني قبل استخدام طرق التمهيد السابقة.

طريقة وينترز للتمهيد الأسى تعالج مشكلة الموسمية كما تعالج أيضاً مشكلة الاتجاه العام إن وجد. لهذا تستخدم عادة عندما يكون بالسلسلة تأثير موسمي. وتعتمد الطريقة على ثلاثة ثوابت تمهيد α ، γ و β تتراوح قيمة كل منها بين الصفر والواحد والمعادلات الأربعة التالية :

$$S_t = \alpha \frac{Y_t}{I_{t-L}} + (1-\alpha)(S_{t-1} + b_{t-1}) \qquad \text{... (٤,٧)}$$

$$b_t = \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1+\gamma)b_{t-1} \qquad \text{... (٤,٨)}$$

$$I_t = \beta \frac{Y_t}{S_t} + (1-\beta)I_{t-L} \qquad \text{... (٤,٩)}$$

$$F_{t+m} = (S_t + b_t m)I_{t-L+m} \qquad \text{... (٤,١٠)}$$

حيث L طول فترة التكرار الموسمي ، I الدليل الموسمي (أو العامل الموسمي) وحيث بقية الرموز كما في طريقة هولت.

المعادلة (٤,٧) تقوم بتمهيد قيم السلسلة كما تفعل المعادلة (٤,٤) في طريقة هولت مع فارق أساسي هو تخليص القيمة Y_t من التأثير الموسمي أولاً بقسمتها على الدليل الموسمي الخاص بالفترة t والذي يكون قد تم حسابه قبل L فترة ويرمز له ب I_{t-1}.

مثلاً إذا كانت السلسلة شهرية وهناك تأثير موسمي يتكرر كل ١٢ شهر أي $L = 12$ ، وإذا كانت t تقابل شهر مارس في سنة ما فإن الدليل الموسمي الخاص بشهر مارس

يكون قد حسب في مارس من السنة السابقة أي قبل ١٢ شهر لهذا تقسم Y_t على I_{t-12} . لاحظ أن الدليل الموسمي الخاص بأي موسم (مثلاً شهر) ليس قيمة واحدة ثابتة تحسب مرة واحدة وتستخدم كدليل على تأثير الموسم متى تكرر كما فعلنا في طريقة التفكيك التقليدية بالباب الثاني. ولكن الدليل الموسمي في طريقة وينترز يجدد ويطور مع الزمن.

أما المعادلة (٤ , ٨) فهي تمهد الاتجاه العام وهي تتطابق تماماً مع المعادلة (٤ , ٥) في طريقة هولت. في المعادلة (٤ , ٩) ، S_t قيمة ممهدة أو متوسط وبالتالي خالية من التأثير الموسمي وقسمة Y_t عليها يعطينا بالتالي تقديراً للتأثير الموسمي في الزمن t. ولأن هذا المقدار عرضه لتغيرات عشوائية يتم تمهيده بأخذ متوسط مرجح له وآخر دليل موسمي I_{t-1}. إذا كتبنا (٤ , ٩) بالشكل

$$I_t = I_{t-L} + \beta\left(\frac{Y_t}{S_t} - I_{t-L}\right)$$

نرى أن الدليل الموسمي في الزمن t عبارة عن الدليل الموسمي في الزمن $t-L$ بعد تعديله بإضافة الفرق بينه وآخر تقدير له $\frac{Y_t}{S_t}$ (بعد الضرب في β) إليه.

أخيراً المعادلة (٤ , ١٠) للتنبؤ m فترة للإمام. لاحظ أن آخر دليل موسمي تم حسابه للموسم المقابل ل $t+m$ هو I_{t+m-L}. لهذا كان الضرب في I_{t-L+m} لوضع التأثير الموسمي في الاعتبار عند التنبؤ.

ولبدء طريقة وينترز نحتاج لبيانات في السلسلة الزمنية لموسمين كاملين على الأقل ، أى ٢L قيمة . ذلك أننا نحتاج لل ٢L قيمة الأولى في السلسلة لإيجاد تقدير مبدئي للاتجاه العام والذي يقدر من

$$b = \frac{1}{L}\left[\frac{(Y_{L+1} - Y_1)}{L} + \frac{(Y_{L+2} - Y_2)}{L} + \ldots + \frac{(Y_{L+L} - Y_L)}{L}\right]$$

وبما أن كل حد داخل القوس الكبير هو تقدير للاتجاه العام في فترة طولها L فإن القيمة المبدئية لـb حسب هذه القاعدة هي متوسط هذه التقديرات .

كذلك ، لإيجاد قيم مبدئية للعامل الموسمي في الـL فترة الأولي نوجد متوسطها

$$M = \frac{1}{L}\left[Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_L\right]$$

وتكون قيم العامل الموسمي في الـL فترة الأولي :

$$I_1 = \frac{Y_1}{M}, I_2 = \frac{Y_2}{M}, \ldots, I_L = \frac{Y_L}{M}$$

لاحظ أننا لا نستطيع أن نبدأ التمهيد قبل الفترة $L+1$ لأنه فقط ابتداءاً من الفترة $L+1$ تكون لدينا قيمة للدليل الموسمي I_{t-L} أى I_1 ليمكن استخدام المعادلة (٤,٧). نحتاج إذن أيضاً لقيمة مبدئية ل S_L. وهناك عدة طرق لإيجاد قيمة بداية ل S_L منها استخدام وسط مرجح بمعاملات ذو الحدين لل L قيمة الأولي في السلسلة الزمنية. مثلاً إذا كانت $L = 4$ فبما أن معاملات ذو الحدين لـ$n = 3$ هى ١,٣,٣,١ فإن :

$$S_L = \frac{1\times Y_1 + 3\times Y_2 + 3\times Y_3 + 1\times Y_4}{1+3+3+1}$$

والمثال التالي يوضح كيفية التنبؤ باستخدام طريقة وينترز للتمهيد الأسى.

مثال (٤,٦)

جدول (٤ , ٤) يوضح عدد السيارات التي مرت بنقطة (بالعشرات) في كل من ثلاثة فترات من اليوم B،A وC في ثلاثة أيام متتالية.

اليوم	الفترة	الرقم التسلسلي للفترة (t)	عدد السيارات Y_t	S_t	b_t	I_t
١	A	١	١٠			١,٢٥
	B	٢	٦			٠,٧٥
	C	٣	٨	٧,٥٠	٠,٢٢	١,٠٠
٢	A	٤	١٠	٧,٧٨	٠,٢٣	١,٢٥
	B	٥	٧	٨,٢٧	٠,٢٦	٠,٧٦
	C	٦	٩	٨,٦٢	٠,٢٧	١,٠٠
٣	A	٧	١١	٨,٨٧	٠,٢٧	١,٢٥
	B	٨	٩	٩,٧٠	٠,٣٣	٠,٧٧
	C	٩	١٠	١٠,٠٣	٠,٣٣	١,٠٠

جدول (٤ , ٤)

سنستخدم ثوابت التمهيد $\alpha = 0.2$ ، $\gamma = 0.1$ و $\beta = 0.06$. في هذا المثال الموسم هو الفترة وبالتالي $L = 3$. نحتاج لقيم لكل من b_3، I_1، I_2، I_3 و S_3 لنبدأ التمهيد.

أولاً: قيمة b_3 :

$$b_3 = \frac{1}{L \times L}\left[(Y_4 - Y_1) + (Y_5 - Y_2) + (Y_6 - Y_3)\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[0 + 1 + 1\right] = 0.22$$

ثانياً : لإيجاد I_1، I_2 و I_3 نحسب متوسط القيم الثلاث الأولي :

$$M = \frac{10 + 6 + 8}{3} = 8$$

وبقسمة كل من القيم الثلاث الأولي على ٨ نحصل على :

$$I_1=\frac{Y_1}{8}=\frac{10}{8}=1.25,\ I_2=\frac{Y_2}{8}=\frac{6}{8}=0.75,\ I_3=\frac{Y_3}{8}=\frac{8}{8}=1$$

ثالثاً: S_3 نحصل عليها بأخذ متوسط القيم الثلاث الأولى مرجحة بعاملات ذوالحدين ١ , ٢ , ١:

$$S_3=\frac{1*10+2*6+1*8}{1+2+1}=7.5$$

يمكننا الآن أن نبدأ التمهيد باستخدام المعادلات (٤ , ٧) ـ (٤ , ٩)

في الفترة ٤ :

$$S_4=\alpha\frac{Y_4}{I_{4-3}}+(1-\alpha)(S_3+b_3)$$

$$=0.2\times\frac{10}{1.25}+0.8(7.5+0.22)=7.78$$

$$b_4=\gamma(S_4-S_3)+(1-\gamma)b_3$$

$$=0.1(7.78-7.5)+0.9\times0.22=0.23$$

$$I_4=\beta\frac{Y_4}{S_4}+(1-\beta)I_{4-3}$$

$$=0.06\times\frac{10}{7.78}+0.94\times1.25=1.25$$

في الفترة ٥ :

$$S_5=\alpha\frac{Y_5}{I_{5-3}}+(1-\alpha)(S_4+b_4)$$

$$=0.2\times\frac{7}{0.75}+0.8(7.78+0.23)=8.27$$

$$b_5=\gamma(S_5-S_4)+(1-\gamma)b_4$$

$$= 0.1(8.27 - 7.78) + 0.9 \times 0.23 = 0.26$$

$$I_5 = \beta \times \frac{Y_5}{S_5} + (1-\beta) I_{5-3}$$

$$= 0.06 \times \frac{7}{8.27} + 0.94 \times 0.75 = 0.76$$

وهكذا لبقية الفترات.

للتنبؤ من الفترة ٦ بالقيمة في الفترة ٨ نستخدم المعادلة (١٠, ٤) بأخذ $L = 3$ و $t = 6$ ، $m = 2$

$$F_{t+m} = (S_t + b_t \times m) I_{t-L+m}$$

$$F_8 = (S_6 + b_6 \times 2) \times I_5$$

$$= (8.62 + 0.27 \times 2) \times 0.76 = 6.96$$

لاحظ أننا قد افترضنا ضمناً في طريقة وينترز التي استخدمناها النموذج الضربي: $Y_t = T_t \times S_t \times e_t$

ولكن ذلك لا يمنع – إذا كانت طبيعة السلسلة تستدعي ذلك – أن يكون النموذج المستخدم جمعي. كذلك قد لا يكون بالسلسلة الزمنية اتجاه عام وإنما تأثير موسمي فقط.

عندما تكون السلسلة الزمنية خاضعة لتأثير موسمي فقط (بدون اتجاه عام) يمكن استخدام ما يسمى بالتمهيد الأسى الموسمي البسيط **Simple seasonal exponential smoothing** والذي يتم من خلال المعادلات:

$$S_t = \alpha(Y_t - I_{t-L}) + (1-\alpha) S_{t-1} \quad \text{....١}$$

$$I_t = \delta(Y_t - S_t) + (1-\delta) I_{t-L} \quad \text{....٢}$$

$$F_{t+m} = S_t + I_{t+m-L} \quad \text{....٣}$$

حيث α و δ ثوابت تمهيد.

٤, ٥, ٤ ملاحظات عامة عن طرق التمهيد الأسى

١. في كل طرق التمهيد الأسى التي ناقشناها افترضنا أن الاتجاه العام خطى. لكن هناك حالات لا يكون فيها الاتجاه العام خطياً ومنها

أ. الاتجاه العام الأسى: في هذه الحالة يكون معدل النمو أو الانخفاض في السلسلة أسرع مما يعكسه الخط المستقيم.

ب. الاتجاه العام المتضائل Damped trend: وفيه يكون معدل النمو في السلسلة الزمنية أبطأ مما يمثله الخط المستقيم.

٢. ثوابت التمهيد تحدد السرعة التي تتناقص بها الأوزان المعطاة لقيم السلسلة ونحن نتجة نحو القيم الأقدم. فالقيمة الصغيرة (مثلاً قرب الصفر) تسمح للقيم البعيدة للتأثير بشكل أكبر.

٣. تحديد ثابت التمهيد يتم بإحدى طريقتين:

أ. طريقة تعتمد على التقدير الشخصي : وفق هذه الطريقة يحدد الثابت حسب ما نعتقد أنه حادث في السلسلة. فإذا كنا نعتقد أن السلسلة (أو بدقة أكبر الآلية المولدة لها) قد حدثت فيها تغيرات كبيرة أخيراً نميل لاختيار ثابت تمهيد قرب الواحد مثلاً ٩, ٠. أما إذا كنا نرى أن السلسلة مستقرة لدرجة كبيرة فقد نستخدم ثابتاً في حدود ١, ٠.

ب. طريقة موضوعية: وفيها نترك للسلسلة الزمنية توجيهنا في اختيار ثابت التمهيد ، وذلك بتجربة عدة قيم للثابت واختيار القيمة التي تعطى أفضل تنبؤ وفق معيار مناسب مثلاً متوسط مربعات الخطأ.

٤. تتميز طرق التمهيد الأسى بأنها تستخدم معادلة تنبؤ متطورة ، تعطي فيها القيم الأحدث وزناً أكبر ويطور فيها الاتجاه العام (كما في طريقة هولت) أو الاتجاه العام والدليل الموسمي (كما في طريقة وينترز). فهى بالتالي تستند – في حالة الاتجاه العام – على معادلة اتجاه عام محلية Local trend equation بدلاً من معادلة اتجاه عام عامة global trend equation.

٥, ٥, ٤ التمهيد الأسى باستخدام الحاسب

لتنفيذ طرق التمهيد الأسى المفرد و الثنائي الهولت والثلاثي لوينترز باستخدام حزمة **SPSS** يتم إتباع الخطوات الآتية:

١. تدخل السلسلة الزمنية.بالنسبة لطريقة وينترز يجب أيضاً تحديد الوحدات الزمنية بالتأشير على **Define dates** في شريط الخدمة ثم استخدام الصفة التي تنطبق على البيانات. مثلاً **Years months** . ولا تنفذ طريقة وينترز ما لم تجرى هذه الخطوة.

٢. أشر على **Analyze** في شريط الخدمة واختار **Forecasting** أو **time series**. وعندما تنزل قائمة اختار **create models** .

٣. في النافذة التي تفتح أنقل متغير السلسلة إلى مستطيل **Dependent variable**.

٤. أشر على المكان المكتوب فيه **Expert modeler** واختار **Exponential smoothing**

٥.أشر على **criteria**وعندما تفتح نافذة أشر على الطريقة التى تريد : المفرد ، هولت ... الخ ثم **Continue**.

٦. عندما ترجع للنافذة الأولي أشر على **statistic** وأشر على الإحصائيات التي تريد وأهمها R^2 و **root mean square error** و **parameter estimates**.

٧. أشر على **plots** في شريط الخدمة واختار أن يرسم لك السلسلة ، **Forecasts**، **Fit values** وفترات الثقة .

٨. يمكن طلب ال**Expert modeler** ليختار لك أفضل نموذج تمهيد أسى.

الباب الخامس

النماذج الخطية المستقرة

Linear Stationary Models

١ , ٥ مقدمة

في هذا الباب نتعرف على مجموعة هامة من نماذج السلاسل الزمنية تسمي النماذج الخطية المستقرة. وهي نماذج لا تتغير فيها الخصائص الإحصائية للسلسلة الزمنية مع الزمن .هذه النماذج هي التي يمكن فيها إجراء الاستدلال الإحصائي (من تقدير واختبار فرض) بكفاءة .وفي الباب السادس ستتعرض للنماذج غير المستقرة ، والتي يجب أن تحول لمستقرة ليمكن إجراء الاستدلال الإحصائي عليها بالكفاءة المطلوبة .وقبل أن نتناول هذه النماذج نتعرف أولاً على بعض الرموز والمصطلحات الهامة.

٢ , ٥ مشغل الإزاحة ومشغل الفرق Shift operator & Difference operator

للسلسلة الزمنية $\{Y_t\}$ يعرف مشغل الإزاحة للخلف **Backward shift operator** ويرمز له ب B كما يلي :

$$BY_t = Y_{t-1}$$

أي أنه يُرجع المشاهدة فترة زمنية واحدة للوراء .ويمكن استخدام B بشكل مكرر فمثلاً :

$$B(BY_t) = B^2Y_t = Y_{t-2}$$

يُرجع المشاهدة فترتين زمنيتين للخلف. في بعض الأحيان نحتاج لمشغل يقوم بالعملية العكسية أى ينقل المشاهدة فترة للأمام..يسمي هذا مشغل الإزاحة للأمام ويرمز له ب $F = B^{-1}$ ويعرف شكلياً :

$$FY_t = Y_{t+1}$$

من ناحية أخري يمكن أن نعرف مشغل للفرق ونرمز له ب ∇ بحيث :

$$\nabla = 1 - B$$

وبالتالي نجد أن $\nabla Y_t = (1-B)Y_t = Y_t - Y_{t-1}$

هو في الواقع الفرق بين القيمة في الزمن t والقيمة في الزمن قبلها. يسمى هـذا الفـرق الأول **first difference**. الفرق الثاني **second difference** هـو الفـرق بـين القيمة في الزمن t والقيمة التي تسبقها بفترتين زمنيتين أى :

$$Y_t - Y_{t-2} = \left(1 - B^2\right)Y_t$$

عموماً الفرق **d**:

$$Y_t - Y_{t-d} = \left(1 - B^d\right)Y_t$$

إذا أخذنا الفرق الأول للفرق الأول نحصل على

$$Y_t - Y_{t-1} - \left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right) = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$
$$= \left(1 - 2B + B^2\right)Y_t = (1-B)^2 Y_t = \nabla^2 Y_t$$

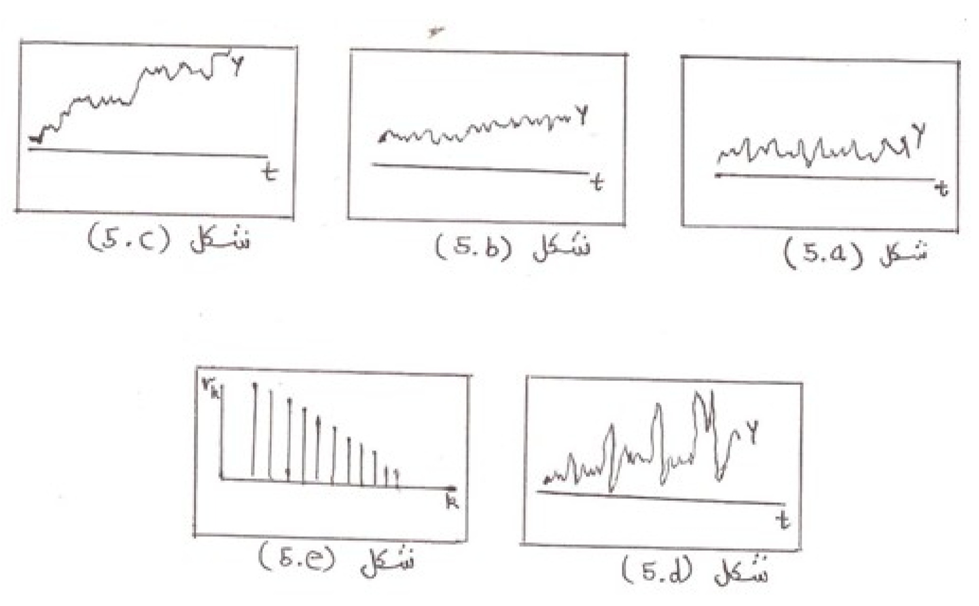
يسمى هذا الفرق ذو الرتبـة ٢ **second-order difference** وهـو يختلـف عـن الفرق الثاني الذي هو مجرد الفرق بين القيمـة والـتي تسـبقها بوحـدتين زمنيـتين. وفي الحالة العامة إذا أجرينا عملية أخذ الفرق الأول **d**مرة يكون لدينا الفرق ذو الرتبة **d**.

والهدف عادة من عملية أخذ فروق هو جعل السلسلة الزمنية مستقرة بالمفهوم الذي سنشرحه بعد قليل.

٥,٣ الإستقرار Stationarity يقال أن العملية التصادفية مستقرة بشكل كامل **strictly stationary** إذا كانت جميع خصائصها الإحصائية لا تتغير مع الزمن .ويعني ذلك أننا إذا أجرينا المشاهدات $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}$ في الأزمنة $t_1, t_2, \ldots, t_n$ فإن دالة كثافة الإحتمال المشتركة لها تتطابق مع تلك التي للمشاهدات $Y_{t_1+m}, Y_{t_2+m}, \ldots, Y_{t_n+m}$ المأخوذة في الأزمنة $t_{1+m}, t_{2+m}, \ldots, t_{n+m}$.

وتوصف أى سلسلة زمنية تولدت عن هذه العملية التصادفيه بأنها مستقرة بشكل كامل . وبما أنه يتعذر في الواقع العملي التحقق من وجود الاستقرار الكامل فإنه يكتفي عادة بما يسمي بالاستقرار الضعيف **weak stationarity** والذي يتطلب فقط أن يكون متوسط العملية وتباينها لا يتغيران مع الزمن (ثوابت) وأن السلاسل الزمنية التغاير بإبطاء **k** يعتمد فقط على فارق الزمن **k** وليس على الزمن. أى لا يتغير مع الزمن إذا كانت **k** ثابتة. وفي أدبيات السلاسل الزمنية جرى العرف على استخدام "مستقرة " للعملية التصادفيه (وبالتالي السلسلة المتولده عنها) التي تحقق الاستقرار الضعيف. وهذا ما سنتبعه في هذا الكتاب.

وتجدر الإشارة إلى أنه يمكن أحياناً من رسم السلسلة الزمنية تبين ما إذا كانت السلسلة مستقرة من حيث المتوسط أو من حيث التباين .وتكون السلسلة مستقرة من حيث المتوسط **stationary in the mean** إذا كانت لا تظهر تغيراً في المتوسط مع الزمن (شكل **٥.a**). وتكون مستقرة من حيث التباين اذا لم يظهر تغير في التباين (شكل **٥.b**). أما شكل (**٥.c**) و شكل (**٥.d**) فتظهران



عدم استقرار في المتوسط والتباين بالترتيب. كذلك إذا كانت السلسلة مستقرة فإن

معامل الارتباط الذاتي لن يكون كبيراً بعد إبطاء أو اثنين أما اذا كانت السلسلة غير مستقرة فإن عدد معاملات الارتباط الذاتي تكون معنوية لعدد كبير من الابطاءات وقد تأخذ شكل اتجاه عام . كما في شكل (e)٥.

ويعالج عدم الاستقرار في المتوسط بأخذ فرق مناسب*.كما يعالج عدم الاستقرار في التباين باستخدام تحويله مناسبة.

ملحوظة :

إذا كانت السلسلة مستقرة فإن دالة التغاير ودالة الارتباط الذاتي تحققان $\gamma_k = \gamma_{-k}$ و $\rho_k = \rho_{-k}$ بالترتيب أى هما دوال زوجية في k .

البرهان :

بما أن $\gamma_k = \text{cov}(Y_t, Y_{t+k})$ لا يعتمد على t فانه بوضع $t = t - k$ نجد أن: $\gamma_k = \text{cov}(Y_{t-k}, Y_{t-k+k}) = \text{cov}(Y_{t-k}, Y_t) = \gamma_{-k}$

٤, ٥ القابلية للعكس Invertibility

رأى يول ((١٩٢٧) Yule) أن السلسلة الزمنية التي ترتبط قيمها المتتالية ببعضها يمكن اعتبارها قد تولدت من سلسلة من الهزات shocks المستقلة e. وأن هذه الهزات تمثل مشاهدات عشوائية من توزيع معين (عادة يفترض التوزيع الطبيعي) بمتوسط صفر وتباين σ_e^2. ويسمى التتالي $e_1, e_{t-1}, e_{t-2}, ...$ عادة عملية الضجة البيضاء white noise process . هذه الضجة البيضاء يفترض أنها قد تحولت للمشاهدات Y_t بالسلسلة من خلال ما يسمى بالمصفاة الخطية linear filter والتي تقوم بأخذ مجموع مرجح للقيم السابقة لـe بحيث يعطينا القيمة الحالية لـY. بمعنى آخر :

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu + e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_1 e_{t-2} + ... \\ &= \mu + \psi(B) e_t \end{aligned}$$

* هناك طرق أخرى ذكرنا بعضها في الباب الثانى.

حيث μ متوسط أو مستوى العملية Y_t و

$$\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots$$

لنفرض الآن أن لدينا العملية البسيطة

$$\tilde{Y}_t = e_t - \theta e_{t-1} = (1 - \theta B) e_t \qquad \ldots(٥,١)$$

حيث $\tilde{Y}_t$ تمثل انحراف Y_t عن متوسط العملية μ .

إذا كتبنا (٥,١) بالشكل

$$e_t = (1 - \theta B)^{-1} \tilde{Y}_t$$

وطبقنا البديهية :

$$(1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

نخلص إلى

$$e_t = \tilde{Y}_t + \theta \tilde{Y}_{t-1} + \theta^2 \tilde{Y}_{t-2} + \theta^3 \tilde{Y}_{t-3} + \ldots$$

أو

$$\tilde{Y}_t = e_t - \theta \tilde{Y}_{t-1} - \theta^2 \tilde{Y}_{t-2} - \theta^3 \tilde{Y}_{t-3} - \ldots$$

ولكن إذا كان $|\theta| \geq 1$ فإن $\tilde{Y}_t$ (التي تعتمد على القيم السابقة ل $\tilde{Y}$) ستكون لانهائية لأن أوزان $\ldots \tilde{Y}_{t-1}, \tilde{Y}_{t-2}, \tilde{Y}_{t-3}$ تتزايد كلما زاد الإبطاء. لهذا نحتاج لأن نتفادى مثل هذا الوضع بإضافة الشرط $|\theta| < 1$. هذا يجعل السلسلة $(1 - \theta B)^{-1}$ تتقارب. نصف السلسلة في هذه الحالة بأنها تتميز بالقابلية للعكس **invertibility** أو أنه يمكن عكسها.

خاصية القابلية للعكس مستقلة عن خاصية الاستقرار ، وسنحتاجها لاحقاً في نقاشنا لنماذج السلاسل الزمنية.

٥,٥ عملية الانحدار الذاتي Autoregressive Process

عمليـــة (أو نمـــوذج) الانحـــدار الـــذاتي برتبـــة **p** ، ويرمـــز لهـــا اختصـــاراً

ب**AR(p)** هي عملية ينظر فيها للقيمة Y_t كدالة في القيم السابقة لـ**Y** حتى إبطاء **p** مع وجود خطأ عشوائي e_t وثابت μ. وهي تأخذ الشكل :

(٥,١a)...

$$Y_t = \mu + \phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \phi_2(Y_{t-2} - \mu) + \ldots + \phi_p(Y_{t-p} - \mu) + e_t$$

بوضع $\tilde{Y} = Y - \mu$:

$$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Y}_{t-2} + \ldots + \phi_p \tilde{Y}_{t-p} + e_t \qquad \text{(٥,١b)...}$$

وهي تشبه معادلة الانحدار مع الاختلاف في أن المتغيرات "المستقلة" هي القيم السابقة للمتغير ذاته ، ومن هنا كانت التسمية "انحدار ذاتي".

١,٥,٥ نموذج الانحدار الذاتي برتبة ١ (AR(1

لعل أهم نموذج انحدار ذاتي هو النموذج ذو الرتبة ١ :

$$Y_t = \mu + \phi(Y_{t-1} - \mu) + e_t \qquad \text{(٥,٢)...}$$

والذي يفترض فيه أن قيمة السلسلة في الزمن **t** تعتمد على القيمة في الزمن $t-1$ (بالإضافة للخطأ). لندرس بعض خصائص هذا النموذج دعنا نعوض عن Y_{t-1} في (٥,٢) بقيمتها بدلالة Y_{t-2} وعن Y_{t-2} بقيمتها بدلالة Y_{t-3} هذا يؤدي إلى

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu + \phi\left[\mu + \phi(Y_{t-2} - \mu) + e_{t-1} - \mu\right] + e_t \\ &= \mu + \phi\left[\phi(\mu + \phi(Y_{t-3} - \mu) + e_{t-2} - \mu) + e_{t-1}\right] + e_t \\ &= \mu + \phi^3(Y_{t-3} - \mu) + \phi^2 e_{t-2} + \phi e_{t-1} + e_t \\ &= \mu + \phi^3(Y_{t-3} - \mu) + \sum_{j=0}^{3-1} \phi^j e_{t-j} \end{aligned}$$

وإذا إستمرينا في التعويض حتى أبطاء **t** لنصل لـ Y_0 نجد أن (٥,٢) يمكن كتابتها بالشكل :

$$Y_t = \mu + \phi^t(Y_0 - \mu) + \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j e_{t-j} \qquad \text{(٥,٣)...}$$

بافتراض أن ال $e's$ غير مرتبطة ولكل منها متوسط ٠ نجد بأخذ توقع الطرفين :

$$\mu_t = \mu + \phi^t (\mu_0 - \mu) \qquad ...(٥ , ٤)$$

حيث $\mu_t = E(Y_t)$

كذلك بما أن الضجة البيضاء e_t غير مرتبطة وكل منها بتباين σ_e^2 فإن (حيث V ترمز لتباين)

$$V(Y_t) = \sum_{j=0}^{t-1} \phi^{2j} \sigma_e^2 + \phi^{2t} V(Y_0)$$

$$= \sigma_e^2 \left(\frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2} \right) + \phi^{2t} V(Y_0) \qquad ...(٥ , ٥)$$

باستخدام بديهية كثيرة الحدود :

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{j=0}^{n} x^j$$

بوضع $x = \phi^2$ و $n = t-1$.

نلاحظ من (٥ , ٤) أن المتوسط لن يكون ثابتاً (مساوياً ل μ) في الحالة العامة لأن الحد الثاني يعتمد على الزمن **t** . نفس الشيء في (٥ , ٥) لن يكون التباين ثابتاً لاعتماده على **t** ما لم توضع شروط إضافيه . هذا يعنى أن نموذج الانحدار الذاتي برتبة ١ قد لا يكون مستقراً . سنرى فيما يلي أننا إذا افترضنا $|\phi| < 1$ فإن العملية **AR(١)** ستكون مستقرة. إذا وضعنا الشرط $|\phi| < 1$ فإن (٥ , ٤) تصبح ل**t** كبيرة:

$$|\phi| < 1 \qquad \mu_t = \mu$$

كذلك يتلاشى الحد الثاني في (٥,٥) ويصبح الحـد الأول $\frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2}$. أى ان التبـاين يصبح ثابتاً أيضاً

$$V(Y_t)=\frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2} \qquad |\phi|<1$$

بالاستفادة من خصائص المتوالية الهندسية اللانهائية هذا يعنى أننا إذا نظرنـا للسلسـلة الزمنية المشاهدة على أنها نتجت عن عملية ظلت مستمرة لفترة طويلة وأن $|\phi|<1$ ، فإن السلسلة ستكون مستقرة منذ أخذ أول مشاهدة . عمومـاً أى عمليـة **AR(١)** لهـا تاريخ لا نهائي وبها $|\phi|<1$ تكون مستقرة .

إذا كتبنا (٥,٢) بشكل انحرافات عن المتوسط تكون :-

$$\tilde{Y}_t=\phi\tilde{Y}_{t-1}+e_t$$

باستخدام مشغل الإزاحة للخلف :

$$(1-\phi B)\tilde{Y}_t=e_t$$

وبمـا أن جـذر المعادلـة $1-\phi B=0$ (إذا نظرنـا لـ**B** كمـتغير صـوري) هـو $B=\phi^{-1}$ فان الشرط $|\phi|<1$ المطلوب للاستقرار يكافئ القول بأن جذر المعادلة المميزة $1-\phi B=0$ يجب أن يقع خارج دائرة الوحدة (أي يكون اكبر من واحـد عددياً).

ليكتمل إثبات الاستقرار يجب أن يكون التغاير أيضاً غير معتمد علـى الـزمن t . نلاحظ أولا أننا إذا استمرينا في تكرار التعويض عن قيم Y بـالقيم السـابقة كمـا فعلنا في الوصول إلى (٥,٣) فإننا سنصل في النهاية إلى التمثيل :

$$Y_t=\mu+\sum_{j=0}^{\infty}\phi^j e_{t-j} \qquad \text{...(٥.ba)}$$

الآن التغاير بإبطاء **k**:

$$\gamma_k = \operatorname{cov}(Y_t, Y_{t+k})$$

$$= E\left(\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j e_{t-j} - E(\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j e_{t-j})\right) \times$$

$$\left(\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j e_{t+k-j} - E(\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j e_{t+k-j})\right)$$

$$= E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j e_{t-j}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j e_{t+k-j}\right)$$

لأن :

$$E\left(\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j e_t\right) = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j E(e_t)$$

$$= \mu + 0 = \mu$$

كذلك يمكن كتابة

$$\gamma_k = E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{j'=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j'} e_{t-j} e_{t+k-j'}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{j'=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j'} E\left(e_{t-j} e_{t+k-j'}\right)$$

لكن التوقع في الطرف الأيمن سيساوى صفر بسبب عدم ارتباط قيم eالمختلفة ما لم تتساوى المؤشرات $t-j$ و $t=k-j'$ أي ما لم تكن $j' = j+k$ وهى الحالة التي يكون فيها التوقع مساوياً للتباين σ_e^2:

بالتالي $j' = j+k$ $\qquad E\left(e_{t-1} e_{t+k-j'}\right) = V(e_t) = \sigma_e^2$

$$\gamma_k = \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j+k} = \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j+k}$$

$$= \sigma_e^2 \phi^k \sum_{j=1}^{\infty} \left(\phi^2\right)^j$$

وإذا كانت $|\phi| < 1$ فإن

$$\gamma_k = \sigma_e^2 \phi^k \left(\frac{1}{1-\phi^2} \right)$$

$$= \phi^k \gamma_0 \qquad \ldots (٥,٦b)$$

باستخدام مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية التي بها $|\phi| < 1$.

وبما أن الطرف الأيمن لا يعتمد على t فإن التغاير أيضا ثابت ، وهذا يكمل إثبات إن عملية الانحدار الذاتي برتبة ١ تكون مستقرة إذا تحقق الشرط $|\phi| < 1$. لاحظ أنه يمكن أيضاً استخدام (٥,٦a) لإثبات كل من المتوسط والتباين مباشرة.

٥,٥,٢ عمليه الانحدار الذاتي برتبة p

الحالة العامة لعملية الانحدار الذاتي والتي تكون فيها الرتبة p ويرمز لها بAR(p) يأخذ فيها النموذج الشكل :

...(٥,٧)

$$Y_t = \mu + \phi_1 (Y_{t-1} - \mu) + \phi_2 (Y_{t-2} - \mu) + \ldots + \phi_p (Y_{t-p} - \mu) + e_t$$

ويمكن كتابته بدلاله مشغل الإزاحة للخلف :

$$\phi(B)(Y_t - \mu) = e_t$$

حيث :

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p$$

وجـدنا أن عمليـة الانحـدار الـذاتي برتبـة ١ تكـون مسـتقرة عنـدما يتحقـق $|\phi| < 1$ وهـو يعنـى أيضـاً في تلـك العمليـة عنـدما يكـون جـذر المعادلـة المميـزة **characteristic equation** (أو الحل بالنسبة لـz)

$$1 - \phi z = 0$$

اكبر عدديا من واحد. لاحظ أن جذر هذه المعادلة وهو **z** سيحقق $|z| > 1$ إذا تحقق $|\phi| < 1$.

في عمليه الانحدار الذاتي برتبة **P** نجد أيضاً انه إذا كانت العملية مستقرة فـان جميع جذور المعادلة المميزة :

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z - \ldots - \phi_p z = 0$$

ستكون عددياً اكبر من ١ أي تقع خارج دائـرة الوحـدة. ومـن الضـروري أن نلاحظ ان كون جميع معاملات الانحدار الذاتي اقل من واحد عددياً لا يعنى بالضرورة أن العملية مستقرة إذ لابد من التأكد أيضاً من أن جميع جـذور معادلـة كـثيرة الحـدود المميزة تقع خارج دائرة الوحدة. في حالة **AR(١)** ، يؤدى تحقق احدهما للآخـر كمـا رأينا. لإثبات انه إذا كانت العملية **AR(p)** مستقرة فان جميـع جـذور كـثيرة الحـدود المميزة يجب أن تكون اكبر من ١ ، نلاحظ انه إذا كانت السلسلة **Y** مستقرة فان تغايرها الذاتي

(بما أن μ ثابت وبالتالي لا يضيف للتغاير الذاتي) يحقق :

$$\gamma_k = Cov(Y_t, Y_{t-k})$$

$$= Cov\left(\sum_{j=1}^{p} \phi_j Y_{t-j} + e_t, Y_{t-k}\right)$$

$$= E\left\{\left[\sum_{j=1}^{p} \phi_j Y_{t-1}\right]\left[Y_{t-k}\right]\right\} - E\left[\sum_{j=1}^{p} \phi_j Y_{t-1}\right] E\left[Y_{t-k}\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \phi_j \left[E\left(Y_{t-j}Y_{t-k}\right) - E\left(Y_{t-j}\right)E\left(Y_{t-k}\right)\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \phi_j Cov\left(Y_{t-j}, Y_{t-k}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \phi_j \, \gamma_{t-j-t+k}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \phi_j \gamma_{k-j} \qquad k \geq p \ ...(٥,٨)$$

هذه معادله فروق من الدرجة P بمعاملات ثابتة وحلها هو

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^{p} A_j z_j^{-k} \qquad k \geq 0 \ ...(٥,٩)$$

حيث $z_j \,(j = 1,..., p)$ جذور المعادلة المميزة و $A_1, A_2,..., A_p$ ثوابت.

وبما أنه إذا $k \to \infty$ فان $\gamma_k \to 0$ (وهى حقيقة بديهيه لأننا لا نتوقع أن تكون قيم السلسلة التي تبعد عن بعضها بعداً كـبيراً مرتبطـة) وبمـا أن ال A_j ثوابـت فـإن (٥,٩) تقتضى أن تكون $\left|z_j\right| > 1$ لكل j .

في العملية AR(١) رأينا أن الاستقرار لا يتحقق ما لم يمكن كتابة Y_t بدلالـه مجموع متقـارب مـن الضـجة البيضـاء* أو الهـزات e_t ، وهـو مـا يتطلـب أن تكـون $|\phi| < 1$ في :

$$Y_t = \mu + \sum_{j}^{\infty} \phi^j e_{t-j}$$

وإذا كتبنا هذه العملية بالشكل البديل

$$(1 - \phi B)(Y_t - \mu) = e_t$$

نلاحظ أنها تكون مستقرة فقط إذا أمكن عكس $(1 - \phi B)$ والذي يتحقـق

---

* لأن هذا فقط يضمن أن يكون التباين محدوداً.

عندما تكون $|\phi|<1$.

في حاله عمليه الانحدار الذاتي ذو الرتبة **p** والتي يمكن كتابتها بالشكل :

$$\left(1-\phi B-\phi_2 B^2-\ldots-\phi_p B^p\right)\left(Y_t-\mu\right)=e_t$$

يمكن إثبات انه يمكن كتابتها أيضاً بالشكل :

$$\left(1-\frac{B}{Z_1}\right)\left(1-\frac{B}{Z_2}\right)\ldots\left(1-\frac{B}{Z_p}\right)\left(Y_t-\mu\right)=e_t$$

حيث $Z_1,\ldots,Z_p$ جذور المعادلة المميزة (والتي يمكن لبعضها أن يكون مركباً).

من هذا نرى أنه ليمكن كتابة Y_t كمجموع متقارب فى الضجة البيضاء e_t لابد

من أن يكون ممكناً عكس كل الحدود $\left(1-\frac{B}{z_j}\right)$ حيث $j=1,\ldots,p.$ وهو ما يتيسر فقط إذا كانت $|z_j|>1$ لكل **j** . لاحظ أن عملية الانحدار الذاتي دائما قابلة للعكس (بالمعنى المشار إليه في الفصل الجزئي ٤,٥). ذلك أن السلسلة $\phi(B)$ محدودة ولاتحتاج لأى قيود على معاملات الانحدار لضمان قابلية العكس ، إذ يمكن التعبير عن Y_t (أو e_t) بدلالة عدد محدود من قيم **Y** السابقة.

٥,٥,٣ اختبار الاستقرار

رأينا انه لتكون العملية **AR(١)**:

$$\tilde{Y}_t=\phi\tilde{Y}_{t-1}+e_t$$

أو

$$\left(1-\phi B\right)\tilde{Y}_t=e_t$$

مستقرة لابد أن يتحقق :

$$|\phi|<1$$

وفي هذه الحالة يحقق جذر المعادلة المميزة :

$$1-\phi z=0$$

الخاصية $|z|>1$ لأن $z=\frac{1}{\phi}$. أما إذا كانت $|\phi|=1$ فإن $|z|=1$ وتكـون Y_t غير مستقرة. وفى هذه الحالة يمكن جعل السلسلة مستقرة بأخذ فـرق ذو رتبـة ١.

وفى الحالة العامة **AR(P)**، إذا كان في السلسلة الزمنية عدد **r** من جذور الوحدة **unit roots** (أي **r** جذر في المعادلة المميزة تساوي قيمة كل منها ١) فإننا نحتاج لأخذ **r**فرق أو فرق برتبة **r** للحصول على الاستقرار.

بما أن وجود جذر وحده في السلسلة الزمنية (أوالعملية التصادفيه المولدة لها) يعنى عدم استقرارها ، فان محاولات التحقق من عدم الاستقرار تركـز علـى محاولـه اختبـار وجود جذر وحده .وهناك عده اختبارات متوفرة لفرض العـدم بـأن هنـاك جـذر وحده ومـن هذه الاختبـارات اختبار سارقان – بهارقافا **Bhargava- Sargan** واختبار فيليب– بـيرون (١٩٨٨) **Phllip - Peron** . غـير أن أشـهر هـذه الاختبـارات هـو اختبـار ديكـى – فـولر(١٩٧٩) **Dickey – Fuller** وهو ما سنتناوله باختصار هنا.

نفرض أن لدينا العملية :

$$\widetilde{Y}_t=\phi_*\widetilde{Y}_{t-1}+e_t$$

حيث e_t ضجة بيضاء من توزيع بمتوسط ٠ وتباين σ_e^2 مستقلة عن بعـض وحيـث ϕ_* موجبه . في هذه الحـالة العبارة $\phi_*=1$ تـكافئ العبارة أن الجـذر في المعادلـة المميزة $1-\phi_* z=0$ يساوى ١ أيضاً .لهذا لاختبار وجود جذر وحـده يكفـى أن نختبر :

$$H_0:\phi_*=1 \text{ مقابل } H_1:\phi_*<1$$

لاحـظ أننـا إذا رفضـنا H_0 لمصـلحة H_1 نسـتطيع بثقـة أن نـرفض الفـرض بـأن

$\phi_* > 1$. لاحظ أيضاً أن رفض H_0 يعنى قبول أن السلسلة الزمنية مستقرة.

اختبار ديكى وفولر لاكتشاف وجود جذر الوحدة تم التوصل إليه من تجربة محاكاة وفكرته الأساسية كما يلي :

(١) تفرض صحة H_0 أي توضع $\phi_* = 1$ في نموذج العملية ليصبح :

$$\tilde{Y}_t = \tilde{Y}_{t-1} + e_t$$

(٢) تسحب n قيمه من التوزيع الطبيعي لتمثل الضجة e وتسحب الواحدة تلو الأخرى وكلما سحبت قيمة استخدمت في $\tilde{Y}_t = \tilde{Y}_{t-1} + e_t$ لتوليد قيمة ل $\tilde{Y}$.

ولتوضيح ذلك أفرض أننا بدأنا ب $\tilde{Y}_0 = e_0$ حيث e_0 قيمه مسحوبة من التوزيع الطبيعي إذا سحبنا القيمة e_1 تتولد لدينا القيمة $\tilde{Y}_1$ من $\tilde{Y}_1 = \tilde{Y}_0 + e_1$ وبعد سحب القيمة e_2 تتولد $\tilde{Y}_2$ من ... $\tilde{Y}_2 = \tilde{Y}_1 + e_2$ وهكذا حتى $\tilde{Y}_n$.

(٣) يجرى تحليل انحدار السلسلة الزمنية المتحصل عليها في (٢) بافتراض النموذج :

$$\tilde{Y}_t = \phi_* \tilde{Y}_{t-1} + e_t$$

وتقدر قيمة ϕ_* ، $\hat{\phi}_*$ مثلاً وخطأها المعياري $SE(\hat{\phi}_*)$ ومن ثم تحسب قيمة الإحصائية :

$$t' = \frac{\hat{\phi}_* - 1}{S\hat{E}(\hat{\phi}_*)}$$

(٤) تكرر الخطوات (١) – (٣) آلاف المرات وفى كل مرة تحسب قيمة t' . يمدنا ذلك بالتوزيع التكراري ل t' (توزيع ديكى – فولر).

(٥) تحدد القيم في التوزيع المشار إليه في (٤) التي تليها أو تسبقها نسبة (صغيرة) من القيم ، مثلاً ٪٥ , ٢ ، ٪٥،٪١،... . هذه القيم تمثل القيم الحرجة المقابلة لمستويات معنوية مختلفة والتي على أساسها يرفض فرض العدم بوجود جذر وحده (أي السلسلة غير مستقرة) أو لا يرفض .

بمعنى آخر أننا في اختبار ديكي- فولر نستخدم إحصائية t ولكن التوزيع المرجع هو توزيع ديكي- فولر وليس توزيع t المعروف. والسبب في ذلك أنه في حالة عدم استقرار السلسلة الزمنية فإن توزيع t' لن يتبع توزيع t وإنما يتبع توزيع ديكى – فولر. وقد وجد أن استخدام توزيع t يؤدى - في المتوسط – لرفض H_0 بمعدل أكبر.

وقد تم تعميم اختبار ديكى - فولر ليشمل اختبار وجود عدة جذور وحده في السلسلة الزمنية. ففي العملية

$$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \phi_1 \tilde{Y}_{t-2} + \ldots + \phi_p \tilde{Y}_{t-p} + e_t$$

والتي يمكن كتابتها بدلالة الفرق الأول (حيث $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$):

$$\Delta\tilde{Y}_t = \phi^* \tilde{Y}_{t-1} + \phi_1 \Delta\tilde{Y}_{t-1} + \phi_2 \Delta\tilde{Y}_{t-2} + \ldots + \phi_{p-1} \Delta\tilde{Y}_{t-p+1} + e_t$$

حيث e_t يفترض أنها تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين σ^2 (هذا الافتراض يجعل مقدرات المربعات الصغرى تحتفظ بخصائص مقدراتها عند الاستدلال) وحيث :

$$\phi^* = (\phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_p) - 1$$

ويختبر اختبار ديكى – فولر الممتد **Augmented Dickey –Fuller test** فرض العدم $H_0 : \phi^* = 0$ مقابل الفرص البديل $\phi^* < 0$ فإذا رفض H_0 لمصلحة H_1 دعم هذا الادعاء . بأن السلسلة مستقرة.

٤ , ٥ , ٥معامل الارتباط الذاتي الجزئي The Partial autocorrelation coefficient

من المفاهيم الهامة في تحليل السلاسل الزمنية مفهوم معامل الارتباط الذاتي الجزئي .ويعرف معامل الارتباط الذاتي الجزئي ذو الإبطاء k ويرمز له ب ϕ_{kk}، بأنه معامل الارتباط الذاتي بين القيم في السلسلة الزمنية التي تبعد عن بعضها ب kفترة

زمنية مع إبقاء آثـار الإبطـاءات $1,2,...,k-1$ ثابتـة .بمعـني آخـر هـو الارتبـاط الشـرطي بـين Y_t و Y_{t+k} بشـرط $Y_{t+1},...,Y_{t+k-1}$ في الواقـع فـإن معامـل الارتباط الذاتي الجزئي بإبطاء **k** هو آخر معامل انحدار جزئي في عملية انحـدار ذاتـي برتبه **k** . فمثلا معامل الارتباط الذاتي الجزئي بإبطاء ٢، ϕ_{22}، هو المعامل ϕ_2 في العملية :

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + e_t$$

هذا يعني أن معامل الارتبـاط الـذاتي الجزئـي ϕ_{kk} في العمليـة **AR(p)** يكـون صفراً لكل $k > p$ إذ لا توجد حدود للإبطاءات $p+1, p+2,...$ في العملية.

وإذا نظرنا لمعامل الارتباط الذاتي الجزئي كدالة في الإبطاء **k** يكون لدينا دالة الارتباط الذاتي الجزئي **partial autocorrelation function** واختصاراً **(PACF)** . وتلعب دالة الانحدار الذاتي الجزئي دوراً مهماً في التعريف بالنماذج في تحليل السلاسل الزمنية.

٥,٥,٥ دالة التغاير الذاتي ودالة الارتباط الذاتي لعملية الانحدار الذاتي

في معادلة (٥,٧) إذا حولنا μ للطرف الأيسـر وضـربنا طـرفي المعادلـة في $Y_{t-k} - \mu$ ثم أخذنا التوقع نحصل على :

$$E(Y_t-\mu)(Y_{t-k}-\mu)=\phi_1 E(Y_{t-1}-\mu)(Y_{t-k}-\mu)+\phi_2 E(Y_{t-2}-\mu)$$
$$(Y_{t-k}-\mu)+...+\phi_p E(Y_{t-p}-\mu)(Y_{t-k}-\mu)+E(e_t(Y_{t-k}-\mu))$$

أو

$$Cov(Y_t,Y_{t-k})=\phi_1 Cov(Y_{t-1},Y_{t-k})+...+\phi_p Cov(Y_{t-p},Y_{t-k})+Cov(e_t(Y_{t-k}-\mu))$$

بمعني آخر دالة التغاير الذاتي للعملية **AR(p)** تحقق معادلة الفروق :

....(٥,٩)

$$0 \le k \le p \;\; \gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + ... + \phi_p\gamma_{k-p} + \sigma_e^2 I_k$$

حيث I_k متغير صوري يأخذ القيمة ١ إذا كانت $k=0$ و ٠ عدا ذلك.

إذا قسمنا (٥,٩)على التبـاين γ_0 نجـد أن دالـة الارتبـاط الـذاتي للعمليـة AR(p)تحقق معادلة الفروق من الرتبة p :

$$0 \le k \le p \qquad ......(٥,١٠)$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + ... + \phi_p \rho_{k-p} + I_k \frac{\sigma_e^2}{\sigma_y^2}$$

وإذا عوضنا $k = 1,2,..., p$ نحصل على ما يسمي بمعادلات يول –ووكر **Yule –Walker equations**:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + ... + \phi_p \rho_{p-1}$$

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + ... + \phi_p \rho_{p-2} \qquad ٥.١١)$$

....

$$\rho_p = \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + ... + \phi_p$$

حيث استخدمنا النتيجة التي ذكرناها سابقاً من أنة في العمليات المستقرة يتحقق :

$$.\rho_k = \rho_{-k}$$

وتساعد معادلات يول – ووكر – بين أشياء أخـري – في تقـدير معـاملات الانحدار الذاتي كما سنري لاحقاً.

٥,٥,٦ طيف القوة The Power Spectrum

في عملية الانحدار الذاتي

$$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + e_{t-1} + ... + \phi_p \tilde{Y}_{t-p} + e_t$$ حيـث $\tilde{Y}$ تعـني

انحراف Y عن الثابت μ إذا عوضنا بالتتالي عن $\tilde{Y}_{t-1}$، $\tilde{Y}_{t-2}$وهكذا نحصـل علـى سلسلة لا نهائية في الضجة أى أن العملية

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p\right)\tilde{Y}_t = e_t$$

$\phi(B)\tilde{Y}_t = e_t$ أو

اختصـــارا تكـــافئ العمليـــة الخطيـــة (أو مـــا يســـمى أحيانـــا المصـــفاه الخطيـــة (Linear filter:

$$\tilde{Y}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e_{t-j} \qquad \text{... (٥,١٢)}$$

$$= \psi(B) e_t$$

$$\psi(B) = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots + \ldots)$$

وحيث

$$\psi(B) = \phi^{-1}(B) \qquad \text{... (٥,١٣)}$$

الدالة المولدة للتغاير الذاتي The autocovariance generatinig function

للعملية الخطية (٥,١٢) تعرف :

$$\gamma(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k B^k \qquad \text{... (٥,١٤)}$$

وهى تعطى التغاير الذاتي ذو الرتبة k كمعامل B^k **و** B^{-k} .

إذا كان تباين e_t **يساوي** σ_e^2 **لكل t فإن التغاير الذاتي بإبطاء k يكون :**

$$\gamma_k = E\left[\tilde{Y}_t \tilde{Y}_{t+k}\right] - E\left(\tilde{Y}_t\right) E\left[\tilde{Y}_{t+k}\right]$$

$$= E\left[\tilde{Y}_t \tilde{Y}_{t+k}\right]$$

$$= E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{j'=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j'} e_{t-j} e_{t+k-j'}\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} E\left(e_{t-j}^2\right)$$

$$= \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} \qquad \text{....} \ (٥,١٥)$$

ذلـك أنـه في الضـجة البيضـاء e يكـون $E(e_t) = 0$ لكـل t ممـا يجعـل $E(\widetilde{Y}_t) = 0$ من (٥,١٢) وبالتالي اختفاء الحد الثاني في المعادلة الأولـي. كـذلك بما أن e_t و $e_{t'}$ غير مرتبطتين إذا كانت $t \neq t'$ فإن $E(e_{t-j} e_{t+k-j'})$ يكـون صـفراً مـا لم يتسـاوي المؤشـران $t-j$ و $t+k-j'$ اى مـا لم تكـن $k-j' = -j$ أو $j' = j+k$. في هذه الحالة يكون لدينا $E(e_{t-j}^2)$ وهـو σ_e^2.

الآن إذا عوضنا (٥,١٥) في : (٥,١٤)

$$\gamma(B) = \sigma_e^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} B^k$$

$$= \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} B^k$$

$$= \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} B^k$$

لأنه ل $k < -j$ يكون $j+k < 0$ و $\psi_{j'} = 0$ إذا كانت $j' < 0$ مـن تعريف العملية (٥,١٢).

كـذلك إذا وضـعنا $j+k = j'$ بحيـث تكـون $k = j' - j$ فـإن (بمـا أن $k = -j$ تكافئ $j' = 0$):

$$\gamma(B) = \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{j'=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j'} B^{j'-j}$$

$$= \sigma_e^2 \sum_{j'=0}^{\infty} \psi_{j'} B^{j'} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^{-j}$$

$$= \sigma_e^2 \psi(B)\psi(B^{-1})$$
$$= \sigma_e^2 \psi(B)\psi(F) \qquad \text{... (٥,١٦)}$$

حيث F مشغل الإزاحة للأمام ، لأن $B^{-1}Y_{t-1}$ $B^{-1}BY_t =$ **يؤدي إلى** $B^{-1}Y_{t-1} = Y_t$.

نعلم أن طيف القوة بدلالة التغاير الذاتي يمكن كتابته بالشكل (الباب الثالث) :

$$p(f) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \cos 2\pi fk \qquad 0 \le f \le \frac{1}{2}$$

إذا عوضنا $B = e^{-i2\pi f}$ **في (٥,١٤) نحصل على**

$$\gamma(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i2\pi fk} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k (Cos\, i2\pi fk - i\sin 2\pi fk)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k Cos\, i2\pi fk$$

بما أن زاوية الجيب فردية. وهو نصف طيف القوة .لهذا وإذا استخدمنا الصيغة البديلة (٥,١٦) ووضعنا $B^{-1} = e^{i2\pi f}$ **وضربنا في ٢ نحصل على طيف القوة للعملية الخطية (٥,١٢) :**

...(٥,١٧)

$$p(f) = 2\sigma_e^2 \psi(e^{-i2\pi f})\psi(e^{i2\pi f}) \qquad 0 \le f \le \frac{1}{2}$$

٥,٥,٧ طيف القوة لعملية الانحدار الذاتي ذات الرتبة p

في العملية AR(p) نجد من (٥,١٣) أن

$$\psi(B) = \phi^{-1}(B)$$

بالتالي فإن طيف القوة للعملية **AR(p)** يكون :

$$p(f) = 2\sigma_e^2 \phi^{-1}(B)\phi^{-1}(B^{-1})$$

$$= \frac{2\sigma_e^2}{\phi(e^{-i2\pi f})\phi(e^{i2\pi f})} \qquad 0 \le f \le \frac{1}{2} \qquad \text{... (٥,١٨)}$$

ولأن نماذج الانحدار الذاتي ذات الرتبة ١ و ٢ هي الأكثر أهمية في الواقع فستتناول خصائصها بشكل أكثر تفصيلاً في المثالين التاليين.

مثال (٥,١)

لعملية الانحدار الذاتي برتبة ١ :

$$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + e_t$$

حيث $-1 < \phi_1 < 1$ كشرط للاستقرار أوجد :

(i) دالة الارتباط الذاتي .

(ii) التباين .

(iii) طيف القوة .

(١) في حالة $p = 1$ تصبح (٥,١٠) مع ملاحظة أن $I_k = 0$ ما لم تكن $k = 0$:

$$p_k = \phi_1 \rho_{k-1} \qquad k > 0 \quad \text{... (٥,١٩)}$$

هذه معادلة فروق متجانسة من الدرجة الأولى بمعامل ثابت. لحلها نضع

$$\rho_k = \beta^k$$

إذن

$$\beta^k = \phi_1 \beta^{k-1}$$

أو

$$\beta^{k-1}(\beta - \phi_1) = 0$$

$$\therefore \quad \beta = \phi_1$$

وبالتالي الحل العام ل (٥,١٩) هو

$$\rho_k = c\phi_1^k$$

وباستخدام القيد $\rho_0 = 1$ **نجد.** $c = 1$ **أى أن الحل الخاص هو**

$$\rho_k = \phi_1^k \qquad\qquad k \geq 0$$

وهى دالة الارتباط الذاتي للعملية AR(١) .

(ii)التباين

إذا وضعنا $k = 0$ **في (٥,٩) وتذكرنا أن** $\gamma_k = \gamma_{-k}$ **نجد (مع وضع الملاحظة بعد (٥,٩) في الاعتبار) :**

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \ldots + \phi_p\gamma_p + \sigma_e^2$$

وبقسمة الطرفين على γ_0 **وهو تباين العملية** $\widetilde{Y}$ **أى** σ_y^2 **بعد تحويل كل شيء عدا** σ_e^2 **للطرف الأيسر :**

$$1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \ldots - \phi_p\rho_p = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_y^2}$$

أى أن التباين للعملية AR(p) :

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \ldots - \phi_p\rho_p} \qquad (٥,٢٠)$$

وبالتالي التباين في العملية AR(١) (بوضع $\rho = 1$ **) :**

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - \phi_1\rho_1}$$

(iii)الطيف :

من (٥,١٨) وبوضع $\phi(B) = 1 - \phi_1 B$ **نجد طيف القوة**

للعملية $AR(1)$:

$$P(f) = \frac{2\sigma_e^2}{(1-\phi_1 e^{-i2\pi f})(1-\phi_1 e^{i2\pi f})}$$

$$= \frac{2\sigma_e^2}{1+\phi_1^2 - \phi(Cos\,2\pi f + i\sin 2\pi fe + Cos\,2\pi f - i\sin 2\pi f)}$$

$$= \frac{\sigma_e^2}{1+\phi_1^2 - 2\phi_1 Cos 2\pi f} \qquad 0 \le f \le \frac{1}{2}$$

مثال (٥,٢)

لعملية الانحدار الذاتي ذات الرتبة ٢ :

$$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Y}_{t-2} + e_t$$

حيث (للاستقرار) :

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$
$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$
$$-1 < \phi_2 < 1$$

(i) أوجد صيغ ل ϕ_1 و ϕ_2 بدلالة ρ_1 و ρ_2 والعكس .

(ii) أوجد التباين.

(iii) أوجد طيف القوة.

(i) من معادلات يول – ووكر (٥,١١) بأخذ $p = 2$:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1$$
$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2$$

وبحل المعادلتين آنيا ل ϕ_1 و ϕ_2 نحصل بالترتيب على :

$$\left.\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}\\ \phi_2 &= \frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}\end{aligned}\right\} \quad \dots (٥,٢١)$$

وإذا عكسنا الآمر وحللنا المعادلتين ل ρ_1 و ρ_2 :

$$\rho_2 = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} \quad و \quad \rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \quad \dots (٥,٢١)$$

(ii) من (٥,٢٠) بوضع $p=2$ نجد التباين للعملية **AR(٢)** :

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_e^2}{1-\phi_1\rho_1-\rho_2\phi_2}$$

(iii) من (٥,١٨) بأخذ

$$\phi(B) = 1-\phi_1 B-\phi_2 B^2$$

$$P(f) = \frac{2\sigma_e^2}{\left(1-\phi_1 e^{-i2\pi f}-\phi_2 e^{-i4\pi f}\right)\left(1-\phi_1 e^{i2\pi f}-\phi_2 e^{i4\pi f}\right)}$$

٥,٦ عملية المتوسط المتحرك The Moving Average Process

رأينا في (٥,١٢) والمناقشة التي سبقتها أنه يمكن دائما كتابة عملية الانحدار الذاتي في شكل سلسلة لا متناهية في الضجة البيضاء e_t السابقة ، حيث ال $e's$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها بمتوسط ٠ وتباين σ_e^2.

فإذا عبرنا عن Y_t بدلالة قيم e_t حتى إبطاء **q** نحصل على :

$$\tilde{Y}_t = e_t + \theta_1' e_{t-1} + \theta_2' e_{t-2} + \dots + \theta_q' e_{t-q}$$

أو لنلتزم بالعرف الجاري باستخدام إشارات سالبة :

$$\tilde{Y}_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \ldots - \theta_q e_{t-q} \quad \ldots (٥,٢٣)$$

حيث $\theta_j = -\theta'_j$ لكل j نصل لما يسمي عملية أو نموذج المتوسط المتحرك ذو الرتبة **q** ويرمز لها ب**MA(q)** والتي يمكن كتابتها بالشكل :

$$\tilde{Y}_t = \theta(B) e_t$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q \quad \text{حيث}$$

هذا يعنى أنه بينما تعبر عملية الانحدار الذاتي ذات الرتبة **p** عن $\tilde{Y}_t$ بدلالة قيم $\tilde{Y}$ السابقة حتى إبطاء **p** تعبر عملية المتوسط المتحرك برتبة **q** عن $\tilde{Y}_t$ بدلالة الهزات **e** السابقة حتى إبطاء **q**. لاحظ أن عبارة "متوسط متحرك" المستخدمة هنا لا يشير لمفهوم المتوسط المتحرك الذي مر علينا سابقاً لأن المجموع بالطرف الأيمن لا يمثل متوسطاً إذ أن مجموع ال $\theta's$ لا يساوي واحد ، بل أن بعضها قد يكون سالباً .انه مجرد اسم جرى العرف على استخدامه .

نلاحظ أولاً أن أى عملية متوسط متحرك مستقرة مهما كانت قيم المعالم $\theta_1, \theta_2, \ldots$ وسنثبت ذلك للعملية ذات الرتبة ١ و التعميم للرتبة **q** مباشر .

العملية **MA(١)** يمكن كتابتها بالشكل :

$$Y_t = \mu + e_t - \theta e_{t-1}$$

حيث ال $e's$ متغيرات عشوائية مستقلة لكل منها متوسط صفر وتباين σ_e^2 وحيث μ متوسط العملية .لإثبات الاستقرار (الضعيف) يجب أن نثبت أن كل من المتوسط ، التباين والتغاير للعملية لا يعتمد على الزمن **t**.

أولاً :المتوسط :

بما أن $E(e_t) = 0$ لكل **t** فإن

$$E(Y_t) = \mu + E(e_t) + \theta E(e_{t-1}) = \mu$$

ثانياً :التباين :

بما أن ال $e's$ مستقلة وتباين كل منها σ_e^2 فإن :

$$V(Y_t) = V(e_t) + V(\theta e_{t-1})$$
$$= \sigma_e^2 + \theta^2 \sigma_e^2$$
$$= (1+\theta^2)\sigma_e^2$$

ثالثاً :التغاير :

$$Cov(Y_t, Y_{t+1}) = Cov(\mu + e_t - \theta e_{t-1}, \mu + e_{t+1} - \theta e_t)$$
$$= E(e_t - \theta e_{t-1})(e_{t+1} - \theta e_t) - E(e_t - \theta e_{t-1})E(e_{t+1} - \theta e_t)$$
$$= E(e_t - \theta e_{t-1})(e_{t+1} - \theta e_t) - 0$$

$$= E(e_t e_{t+1}) - \theta E(e_t^2) - \theta E(e_{t-1} e_{t+1}) + \theta^2 E(e_{t-1} e_t)$$
$$= -\theta E(e_t^2) = -\theta \sigma_e^2$$

باستخدام $E(e_j) = 0$ لكل **j** و $E(e_j e'_j) = 0$ لكل $j \neq j'$ وتذكر أن μ ثابت لا يضيف للتغاير.

من ناحية أخري $\text{cov}(Y_t, Y_{t+k}) = 0$ ل $k \geq 2$ لأنة لن تكون هناك $j = j'$ في المقادير من النوع $E(e_j e_{j'})$ وبالتالي ستساوي جميعها أصفاراً.

وبما أن كل من المتوسط ، التباين والتغاير لا يعتمد على الزمن **t** وهي بالتالي جميعها ثابتة مع الزمن نستنتج أن العملية **MA(١)** مستقرة .وتنطبق خاصية الاستقرار على عملية المتوسط المتحـرك بـأي رتبـة .ورغـم أن ذلـك يتحقـق مهمـا كانـت قـيم $\theta_1, \dots, \theta_q$ إلا أن هذه المعالم مقيدة بشرط القابلية للعكس **Inevrtability** .

٥,٦,١ قابلية العكس في عملية المتوسط المتحرك

في أحيان كثيرة يكون من الأنسب التعامل مع عملية انحـدار ذاتـي بـدلاً عـن

عملية متوسط متحرك .في هذه الحالة نتساءل عمـا إذا كـان مـن الممكـن كتابـة عمليـة المتوسط المتحرك في شكل عملية انحدار ذاتـي أي أن تكـون **e** دالـة في القيمـة الحاليـة والقيم السابقة ل **Y**. لنرى متى يمكن تحقيق ذلك نأخذ العملية **MA(١)** :

$$\tilde{Y}_1 = e_t - \theta e_{t-1} = (1-\theta B)e_t$$

إذا كتبنا هذه المعادلة بالشكل :

$$(1-\theta B)^{-1}\tilde{Y}_1 = e_t \qquad \text{... (٥,٢٤)}$$

واستخدمنا البديهية

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

نجد أنه يمكن كتابة الطرف الأيسر من **(٥,٢٤)** بالشكل :

$$\tilde{Y}_t + \theta\tilde{Y}_{t-1} + \theta^2\tilde{Y}_{t-2} + \theta^3\tilde{Y}_{t-3} + \ldots = e_t$$

أى أنه يمكن تحويل عملية المتوسط المتحرك لعملية انحدار ذاتي لا نهائية الرتبة.

ومالم تكن $|\theta| < 1$ فإن قيم $\tilde{Y}_t$ تعتمد على قيم $\tilde{Y}$ السابقة بـأوزان تتزايـد بشـكل لانهائي. لتفادى ذلك ولجعل هذه الحدود تتقارب نضع الشرط $|\theta| < 1$. لهذا عندما تكون $|\theta| < 1$ نقول أن عملية المتوسط المتحرك قابلة للعكس **Invertible** .

وفى الحالة العامة ، فإن العملية

$$\tilde{Y}_t = (1-\theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q)e_t$$

تكون قابلة للعكس فقط إذا كانت جميع جذور معادلة كثيرة الحدود المميزة

$$1-\theta_1 z - \theta_2 z^2 - \ldots - \theta_q z^q = 0$$

أكبر عددياً من١ . أى تقع جميعها خارج دائرة الوحدة.

لاحظ أنه بما أن الحدود في $\theta(B)$ لعملية متوسط متحرك برتبـه **q** محـدودة فليس هناك أيه قيود على المعاملات θ لتصبح مستقرة ذلـك أن كـل مـن المتوسـط ، التباين والتغاير سيكون ثابتاً ومحدوداً. بمعنى آخر عملية المتوسط المتحرك دائماً مستقرة. وبهذا نرى أنه بينما عملية الانحدار الذاتي دائماً قابلة للعكس ولكـن قـد تكـون غـير

مستقرة نرى أن عملية المتوسط المتحرك دائماً مستقرة ولكن يمكن أن تكون غـير قابلـة للعكس.

٥,٦,٢ التغاير الذاتي والارتباط الذاتي وطيف القوة لعملية المتوسط المتحرك

لعملية المتوسط المتحرك برتبة **q** :

$$\tilde{Y}_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \ldots - \theta_q e_{t-q}$$

التغاير الذاتي بإبطاء **k** لهذه العملية :

$$\gamma_k = Cov\left(\tilde{Y}_t, \tilde{Y}_{t-k}\right)$$
$$= Cov\left[\left(e_t - \theta_1 e_{t-1} - \ldots - \theta_q e_{t-q}\right)\left(e_{t-k} - \theta_1 e_{t-k-1} - \ldots - \theta_q e_{t-k-q}\right)\right]$$
$$= E(e_t - \theta_1 e_{t-1} - \ldots - \theta_q e_{t-q})(e_{t-k} - \theta_1 e_{t-k-1} - \ldots - \theta_q e_{t-k-q})$$

بتذكر أن $E\left(e_j\right) = 0$ لكل j . كذلك بما أن

$E\left(e_{t-j} e_{t-j'-k}\right) = 0$ ما لم يكن $t - j = t - j' - k$ أى ما لم يتحقق

$j = j' + k$ وهـى الحالة التي

يكون فيها $E\left(e_{t-j} e_{t-j'-k}\right) = \sigma_e^2$ فإن دالة التغاير للعملية **MA(q)** :

$$\gamma_k = \sum_{j=0}^{q} \sum_{j'=0}^{q} \theta_j \theta_{j'} E\left(e_{t-j} e_{t-j'-k}\right)$$
$$= \sigma_e^2 \sum_{j'=0}^{q-k} \theta_{j'} \theta_{j'+k} \qquad k \le q \qquad \ldots (٥,٢٤)$$
$$= 0 \qquad k > q$$

حيث $\theta_0 = 1$. لاحظ أن قيمة j في المجموع الأخير لا يمكـن أن تتخطـي $q - k$ لأن $j' = j + k$ وأقصي قيمة ل j' هي q . كذلك بما أن إشارات ال θ سـالبة فإن حاصل الضـرب $\theta_j \theta_{j'}$ يكـون سـالباً فقـط في الحالـة $\theta_0 \theta_k$ والـتي تسـاوي

$-\theta_k$. لان $\theta_0 = 1$. إذا وضعنا في (٥,٢٤) $k = 0$ نحصل على التباين للعملية

$$\gamma_0 = \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{q} \theta_j^2$$ ... (٥,٢٥)

بقسمة (٥,٢٤) على (٥,٢٥) نحصل على دالة الارتباط الذاتي للعملية **MA(q)**. كما يلي :

$$\rho_k = \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_{k+2} + \ldots + \theta_{q-k}\theta_q}{1+\theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2} \qquad k = 1,2,..q \ldots (5.26)$$

$$= 0 \qquad\qquad k > q$$

هذا يعني أن دالة الارتباط الذاتي للعملية **MA(q)** تكون صفراً ل $k > q$ أو يكون لها قطع **cut –off** عند الإبطاء **q** . نقارن هذا الوضع بدالة الارتباط الذاتي الجزئي لعملية الانحدار الذاتي برتبة **p** والتي رأينا (الفصل الجزئي (٣,٥,٣) أن لها قطع عند $k = \rho$.

في العملية **MA(q)** يتحقق :

$$\psi(B) = \theta(B)$$

حيث $$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q$$

وبالتالي باستخدام (٥,١٧) يكون طيف القوة للعملية **MA(q)**

$$P(f) = 2\sigma_e^2 \left(1 - \theta_1 e^{-i2\pi f} - \theta_2 e^{-i4\pi f} - \ldots - \theta_q e^{-i2\pi q f}\right) \times \left(1 - \theta_1 e^{-i2\pi f} - \theta_2 e^{-i4\pi f} - \ldots - \theta_q e^{-i2\pi q \pi f}\right)$$

$$0 \le f \le 0.5$$ ...(٥,٢٧)

مثال (٥,٣)

لعملية المتوسط المتحرك ذات الرتبة ١ :

$$\widetilde{Y}_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} \qquad |\theta_1| < 1$$

نجد من (٥,٢٥) عند $q = 1$ **أن التباين :**

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \left(\theta_0 + \theta_1^2\right)\sigma_e^2 \\ &= \left(1 + \theta_1^2\right)\sigma_e^2\end{aligned}$$

بما أن $\theta_0 = 1$.

كذلك من (٥,٢٤) عند $q = 1$ **دالة التغاير الذاتي :**

$$\gamma_k = \begin{cases} -\theta_1 \sigma_e^2 & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

ودالة الارتباط الذاتي (بالقسمة على التباين) :

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

من (٥,٢٧) نجد عند $q = 1$ **أن طيف القوة للعملية MA(١) :**

$$\begin{aligned}P(f) &= 2\sigma_e^2 \left(1 - \theta_1 e^{-i2\pi f}\right)\left(1 - \theta_1 e^{-i2\pi f}\right) \\ &= 2\sigma_e^2 \, (1 + \theta_1^2 - \theta_1 \, (e^{-i2\pi f} + e^{i2\pi f})) \\ &= 2\sigma_e^2 \left(1 + \theta_1^2 - 2\theta_1 \cos 2\pi f\right) \qquad 0 \leq f \leq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

مثال (٥,٤) : للعملية ذات الرتبة ٢ :

$$\widetilde{Y}_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}$$

حيث : $\theta_1 + \theta_2 < 1$

$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$
$$-1 < \theta_2 < 1$$

يمكن بطريقة مشابهة لتلك التي اتبعت في مثال (٥,٣) إثبات أن

$$\gamma_0 = \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2\right)\sigma_e^2$$

وأن دالة الارتباط الذاتي :

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & k = 1 \\ \dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & k = 2 \\ 0 & k > 2 \end{cases}$$

أيضاً فان طيف القوة للعملية $MA(2)$:

$$P(f) = 2\sigma_e^2(1-\theta_1 e^{-i2\pi f} - 1 - \theta_2 e^{-i4\pi f})(1-\theta_1 e^{-i2\pi f} - 1 - \theta_2 e^{i4\pi f})$$

حيث $0 \le f \le 0.5$.

٥,٧ عملية الانحدار الذاتي والمتوسط المتحرك المختلطة

The Autoregressive -Moving Average Process

ليس هناك ما يمنع من أن تكون العملية التصادفيه التي نتجت عنها السلسلة الزمنية هي خليط من عملية انحدار ذاتي وعملية متوسط متحرك. لهذا ولإيجاد نموذج يستوعب العمليتين نلجأ لنموذج انحدار ذاتي ومتوسط متحرك مختلط والذي يشار اليه اختصاراً بـ**ARMA** حيث استخدم في الرمز الحرفين الأولين لكل كلمة من الانحدار الذاتي والمتوسط المتحرك بالانجليزية. فإذا كانت عملية الانحدار الذاتي برتبة p وعملية المتوسط المتحرك برتبة q فان النموذج يأخذ الشكل :

$$\widetilde{Y}_t = \phi_1 \widetilde{Y}_{t-1} + \ldots + \phi_p \widetilde{Y}_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \ldots - \theta_q e_{t-q}$$

أو بالشكل الأكثر إستخداماً :

$$\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\ldots-\phi_P B^p\right)\widetilde{Y}_t=\left(1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\ldots-\theta_q B^q\right)e_t$$

واختصاراً

$$\phi(B)\widetilde{Y}_t=\theta(B)e_t \qquad \ldots(٥,٢٨)$$

يرمز لعملية **ARMA** التي بها عملية الانحدار الذاتي ذات رتبة p وعملية المتوسط المتحرك ذات رتبة q بـ $ARMA(p,q)$. العمليات $AR(p)$ و $MA(q)$ كما نري هي الحالات الخاصة $ARMA(p,0)$ و $ARMA(0,q)$ من هذه العملية.

وبما أن الجزء الخاص بعملية الانحدار الذاتي في (٨,٢٨) له نفس كثيرة الحدود المميزة أي $1-\phi_1 z-\phi_2 z^2-\ldots-\phi_p z^p$ فان شرط الاستقرار للعملية $ARMA(p,q)$ يتحقق فقط إذا كانت جذور كثيرة الحدود المميزة هذه كلها أكبر من واحد . فإذا كانت جذور كثيرة الحدود المميزة هي z_j حيث $j=1,\ldots,p$ فيجب أن يتحقق $\left|z_j\right|>1$ لكل j . ونتذكر هنا أن مسألة الاستقرار في هذه العملية تحددها فقط عملية الانحدار الذاتي لأن عملية المتوسط المتحرك دائماً مستقرة . بالنسبة للأخيرة أي عملية المتوسط المتحرك يتحقق شرط قابلية العكس فقط اذا كانت جميع جذور معادلة كثيرة الحدود المميزة في

$1-\theta_1 z-\theta_1 z^2-\ldots-\theta_q z^q=0$ أكبر عددياً من ١ .

وبينما رأينا أن الـ**PACF** في العملية $AR(p)$ لها قطع عند $k=p$ و **ACF** في العملية $MA(q)$ لها قطع عند $k=q$ فإن أياً من الـ**PACF** و الـ**ACF** في العملية $ARMA(p,q)$ ليس له خاصية القطع مما يعقد التعرف علي نموذج $ARMA$.

٥,٧,١ التغاير الذاتي ، الارتباط الذاتي ، التباين والطيف للعملية المختلطة :

اذا وضعنا العملية المختلطة (٥,٢٨) بالشكل البديل

$$Y_t - \mu = \phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \ldots + \phi_p(Y_{t-p} - \mu) + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \ldots - \theta_q e_{t-q}$$

ثم ضربنا الطرفين في $\left(Y_{t-k} - \mu\right)$ وأخذنا التوقع نحصل علي

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \ldots + \phi_p \gamma_{k-p} + \gamma_{ye}(k)$$

$$-\theta_1 \gamma_{ye}(k-1) - \ldots - \theta_q \gamma_{ye}(k-q) \qquad \ldots(5.29)$$

حيث $\gamma_{ye}(k)$ دالة التغاير المقطعي **Cross-Covariance Function** بين y و e ويعرف معامل التغاير المقطعى عند **k** :

$$\gamma_{yr}(k) = E\left(\left(Y_{t-k} - \mu\right)e_t\right) - E\left(Y_{t-k} - \mu\right)E\left(e_t\right)$$

$$= E\left[\left(Y_{t-k} - \mu\right)e_t\right] \qquad \ldots\ldots (٥,٣٠)$$

بما أن $E\,(e_t) = 0$.

ولكن Y_{t-k} تعتمد علي الهزات (أي الـ**e's**) حتي الزمن $t-k$ وبالتـالي أحـدث e فيها هي e_{t-k} . وبما أن الـ**e's** مستقلة فـان توقـع $E\,(e_j e_{j'}) = 0$ متـى مـا كانت $j \neq j'$. وبما أنه لأي k بحيث $k \geq q+1$ يكون المقدار داخل الأقواس في التغايرات المقطعية في (٥,٢٩) مساوياً أو أكبر من واحد ، وبالتالي المقدار المطروح من **t** (أى **k**) في Y_{t-k} سيكون مساوياً أو أكبر من واحد ، وبمـا أن ذلـك يعـني أن المؤشر في e_t سيختلف عن أكبر مؤشر لـ**e** في Y_{t-k} فإن جميع التغايرات المقطعية في (٥,٢٩) ستكون أصفاراً ما دامت $k \geq q+1$. لهذا نستطيع أن نكتب :

$$k \geq q+1 \ldots(٥,٣١)$$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \ldots + \phi_p \gamma_{k-p}$$

وايضا

$$k \geq q+1 \ldots(٥,٣٢)$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \ldots + \phi_p \rho_{k-p}$$

أي أن كل من دالة التغاير الذاتي ودالة الارتباط الذاتي تحقق معادلة فروق من الرتبـه $k-p$. إذا وضعنا $k=0$ في (٥,٢٩) نحصل على التباين :

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \ldots + \phi_p\gamma_p + \sigma_e^2 - \theta_1\gamma_{ye}(-1) - \ldots - \theta_q\gamma_{ye}(-q)$$

من ناحية أخري فان طيف القوة للعملية **ARMA(p,q)** :

$$p(f) = \frac{2\sigma_e^2\theta\left(e^{-i2\pi f}\right)\theta\left(e^{i2\pi f}\right)}{\phi\left(e^{-i2\pi f}\right)\phi\left(e^{i2\pi f}\right)} \qquad \ldots(٥,٣٣)$$

حيث رتبه كثيرة الحدود في $\theta(.)$ و $\phi(.)$ **q** و **p** بالترتيب .

مثال (٥,٥)

في عملية **ARMA(١,١)** وهى أهم عملية مختلطة أى :

$$(1-\phi_1 B)\tilde{Y}_t = (1-\theta_1 B)e_t \qquad \ldots(٥,٣٤)$$

شرط الاستقرار هو $-1<\phi_1<1$ وشرط قابلية العكس $-1<\theta_1<1$.

إذا وضعنا في (٥,٢٩) $k=0$ ، $p=q=1$ نحصل على

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \sigma_e^2 - \theta_1\gamma_{ye}(-1) \qquad \ldots(٥,٣٥)$$

وإذا عوضنا $k=1$ ، $p=q=1$:

$$\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 - \theta_1\sigma_e^2$$

أيضا

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} \qquad \geq 2$$

أى أن دالة التغاير الذاتي تحقق مجموعة من معادلات الفروق.

إذا ضربنا (٥,٣٤) في e_{t-1} وأخذنا التوقع

$$E\left(\tilde{Y}_t e_{t-1}\right) - \phi_1 E\left(\tilde{Y}_{t-1}e_{t-1}\right) = E\left(e_t e_{t-1}\right) - \theta_1 E\left(e_{t-1}^2\right)$$

أو

$$\gamma_{ye}(-1) - \phi_1\sigma_e^2 = 0 - \theta_1\sigma_e^2$$

أى

$$\gamma_{ye}(-1) = (\phi_1 - \theta_1)\sigma_e^2$$

وبتعويض هذه النتيجة في (٥,٣٥) نحصل على

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma_e^2 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1)\sigma_e^2$$

وبحل هذه المعادلة آنياً مع

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_e^2$$

نجد

$$\gamma_0 = \frac{(1 + \theta_1^2 - 2\theta_1\phi_1)\sigma_e^2}{1 - \phi_1^2}$$

و

$$\gamma_1 = \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta)\sigma_e^2}{1 - \phi_1^2}$$

أيضاً

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} \qquad k \geq 2$$

لتكتمل بذلك دالة التغاير الذاتي. وبقسمة كل تغاير على التباين γ_0 نحصل على الارتباط الذاتي بالإبطاءات المختلفة. مثلاً :

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}$$

وهكذا. كذلك يمكن إيجاد طيف العينة لهذه العملية بالتعريف المناسب ل$\theta(B)$ و $\phi(B)$ في (٥,٣٣).

الباب السادس

منهجية بوكس- جنكينز

The Box- Jenkins Methodology

٦,١ مقدمة

في الباب الخامس تناولنا نماذج السلاسل الزمنية المستقرة . وفي هذا الباب نعمم النقاش ليشمل النماذج غير المستقرة.

في كتابهما الرائد (بوكس ـ جنكينز ١٩٧٦) استخدم بوكس وجنكينز منهجية للتنبؤ تحتوي النماذج المستقرة والنماذج غير المستقرة. وتقوم المنهجية على بناء نموذج للسلسلة الزمنية يتم الوصول إليه من خلال المرور بثلاثة مراحل وهى تحديد نوعية النموذج ، تقدير معالم النموذج الذي تم تحديده وإجراء اختبار تشخيصي للنموذج للتأكد من تمثيله للسلسلة .

٦,٢ أسرة نماذج أريما Family of ARIMA models

في الباب الخامس تعرفنا على العملية المختلطة أرما ARMA(q,p) والتي هي في الواقع أسرة من النماذج يتحدد أفرادها بتحديد قيم p وq. وناقشنا الحالات التي تكون فيها مستقرة كما تمت دراسة خصائصها عندما تكون مستقرة.

لكن هناك سلاسل زمنية كثيرة لا يتحقق فيها شرط الاستقرار. ويمكن من خلال أخذ فرق برتبة مناسبة تحويلها لمستقرة. فإذا كانت لدينا عملية مختلطة ARMA(q,p) غير مستقرة لكن يمكن تحويلها لمستقرة بأخذ d فرق ، فبما أن الجمع هو العملية العكسية للطرح (أخذ فرق) فيمكن أن نقول أن العملية المختلطة (غير المستقرة) يمكن الحصول عليها بجمع (أو تكامل) العملية المختلطة (المستقرة) d مرة . لهذا أطلق بوكس وجنكينز على العملية المختلطة غير المستقرة عملية المتوسط المتحرك والانحدار الذاتي التكاملية (التجميعية) autoregressvie integrated moving average ورمزا لها اختصاراً بأريما ARIMA. وإذا كانت رتبة عملية

المتوسط المتحرك والانحدار الذاتي q و p بالترتيب ونحتاج لd فرق للاستقرار نكتب أريما بالشـكل **ARIMA(p, d ,q)**.

وبدلالة مشغل الإزاحة للخلف :

$$\phi(B)\nabla^d Y_t = \theta(B)e_t \qquad \dots (٦,١)$$

حيث $\nabla = 1 - B$.

وواضح أن هذه الأسرة تشمل جميع النمـاذج الـتي تم تناولهـا بالبـاب الخـامس إضـافة لنظائرهـا غـير المسـتقرة. مـثلاً العمليـة **AR(p)** المسـتقرة هـي العمليـة **ARIMA(p,٠ , ٠)**.

وتقول لنا (٦,١) أن العملية التي ولدت السلسلة هي خليط من عملية انحدار ذاتي برتبة **p** و متوسط متحرك برتبة **q** وأنها تحتاج منا لأخذ **d** فرق لتصبح مستقرة.

٦,٣ مرحلة تحديد نوعية النموذج **Identification**

في هذه المرحلة يتم اختيار نموذج أو مجموعـة مـن النمـاذج المرشـحة لاختيـار نموذج من بينها بحيث يكون النموذج قليل المعـالم **parsimonious** بقـدر الإمكـان. ويكون النموذج قد تحدد إذا تحددت قيم **q،p** و **d** في **ARIMA(p,d,q)** .

ومن أهم الأدوات التي تسـتخدم في التعـرف علـى النمـوذج دوال الارتبـاط الذاتي والذاتي الجزئي والطيف. ويساعد برنـامج المحاكـاة **ARIMA** – الـذي يقـوم بتوليد سلسلة أريما بأي قيم مرغوبة للمعالم **q ،p** و **d** وإبـراز دوال الارتبـاط الـذاتي والذاتي الجزئي والطيف بيانياً – في توجيه البحث عن النموذج المطلـوب . إذ بمقارنـة سلوك هذه الدوال في السلسلة الزمنية بالسلوك في السلاسل المولدة (والمعروف قيم **q ،p** و **d** فيها) يمكن أحياناً تحديد أي النماذج أقرب لتمثيل السلسـلة. كـذلك فـإن بعض الخصائص النظريـة للعمليـات والـتي تعرضـنا لهـا في البـاب الخـامس يمكـن أن تساعدنا في تحديد النموذج الذي يتوافق مع السلسلة الزمنية المعنية.

٦,٣,١ تحديد رتبة الفرق d

إذا كانت السلسلة عشوائية أى (٠,٠,٠)ARIMA فهي مستقرة. وفي هـذه الحالة فإن كل معاملات الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي يتوقـع أن تكـون أصـفاراً أو قريبه من الصفر. لهذا يمكن من رسم دالة الارتباط الذاتي معرفة ما إذا كانت السلسلة مستقرة. ذلك أنه إذا كانت السلسلة الزمنية مستقرة فـإن معـاملات الارتبـاط الـذاتي تهبط للصفر بعد إبطاء ٢ أو٣ على الأكثر بينما للسلسلة غير المستقرة تكون معاملات الارتباط الذاتي مختلفة معنوياً عن الصفر لعدة إبطاءات وقد يكون هنـاك اتجاهـاً عامـاً للارتباط الذاتي.

لهذا لتحديد قيمة d نقوم بأخذ الفـرق ذو الرتبـة ٢،١،... (عـدد قليـل مـن الفروق الأولي) وفي كل مـرة نرسـم دالـة الارتبـاط الـذاتي. ثـم نقـرر أن السلسـلة أصبحت مستقرة (وبالتالي تتحدد قيمة d) بمجرد أن يبدأ الارتباط الذاتي الهبوط نحو الصفر بسرعة. عادة قيمة d تكون أحد الأرقـام ٢،١،٠. ويكفـي تقـدير الارتباطـات الذاتية حتي إبطاء ,٢٠

٦,٣,٢ تحديد رتبة الانحدار الذاتي p والمتوسط المتحرك q

بالاستعانة ببرنامج المحاكاة ARIMA وبعض الملاحظـات النظريـة في البـاب الخامس يمكننا بصفة عامـة تحديـد قيمـة p وq لعمليـات الانحـدار الـذاتي والمتوسـط المتحرك والعملية المختلطة بفحص رسم مقـدرات دوال الارتبـاط الـذاتي والارتبـاط الذاتي الجزئي واتخاذ القرار في ضوء القواعد الآتية :

(i) إذا كانت دالة الارتباط الذاتي للسلسلة الزمنية (بعد إجراء d فرق عليها) تتناقص أسياً بينما دالة الارتباط الذاتي الجزئـي تهـبط لصـفر بعـد إبطـاء p نقـرر أن العمليـة .ARIMA(p,d,٠)

(ii) إذا كانت دالة الارتباط الذاتي (بعد إجراء d فرق) تهـبط لصـفر بعـد إبطـاء q ودالة الارتباط الذاتي الجزئي تتناقص أسياً نقرر أن العملية ARIMA(٠,d,q).

(iii) إذا كان كل من دالة الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي بعد اخذ الفرق المناسب تتناقص بالتدريج فهذا مؤشر على عملية مختلطة. وقد أشار بوكس وجنكنينز (١٩٧٦) إلى أنه إذا كانت دالة الارتباط الذاتي تظهر تناقصاً أسياً أو موجات جيب متضائلة damped sine waves (في شكل إرتفاع وإنخفاض) بعد أول $q-p$ إبطاء ودالة الارتباط الذاتي الجزئي تظهر هذا النمط بعد أول $q-p$ إبطاء فإن العملية تحوى عملية انحدار ذاتي برتبة **p** وعملية متوسط متحرك برتبة **q** ، أى **ARIMA(p,d,q)** حيث **d** الفرق المأخوذ. لكن في حالة العملية المختلطة ينبغي أن نلاحظ أن الصورة عادة لا تكون واضحة وقد نضطر لتجربة عدة قيم لـ**p** و**q** .

وبما أن الحالات $p=1$, $p=2$, $q=1$ و $q=2$ هى الأهم في الواقع فسنتناول خصائصها بشيء من التفصيل والسلوك المشار اليه أدناه مفترض حدوثه بعد أخذ **d** فرق على السلسلة.

عملية الانحدار الذاتي (ARIMA(١,d,٠

(١) دالة الارتباط الذاتي تتناقص أسياً.

(٢) معامل الارتباط الذاتي الجزئي بإبطاء ١ هو فقط الذي يختلف معنوياً عن الصفر.

(٣) رسم الطيف تطغى عليه الموجات ذات التكرار المنخفض.

القيم المسموح بها ل ϕ_1 تحقق $-1<\phi_1<1$

عملية المتوسط المتحرك (ARIMA(٠,d,١

(١) معامل الارتباط الذاتي برتبة ١ هو فقط الذي يختلف معنوياً عن الصفر.

(٢) دالة الارتباط الذاتي تتناقص أسياً.

(٣) رسم الطيف يظهر سيطرة الموجات ذات التكرارات العالية ل ϕ_1 موجبة وسيطرة الموجات ذات التكرار المنخفضة ل ϕ_1 سالبة .

القيم المسموح بها $-1<\theta_1<1$

عملية الانحدار الذاتي (ARIMA(٢,d,٠

(١) دالة الارتباط الذاتي تظهر خليطاً من التناقص الأسى وموجات الجيب المتضائلة.

(٢) فقط معاملات الارتباط الجزئي بإبطاء ١ و ٢ تختلف معنوياً عن الصفر.

(٣) رسم الطيف يظهر سيطرة لموجات ليست هي بذات تكرارات كبيرة أو صغيرة.

القيم المسموح بها للمعاملات : $-1 < \phi_2 < 1$

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

عملية المتوسط المتحرك ARIMA(٠,d,٢)

(١) فقط معاملات الارتباط الذاتي ذات الإبطاء ١ و ٢ تختلف معنوياً عن الصفر. (٢) دالة الارتباط الذاتي الجزئي تظهر خليطاً من الانخفاض الأسى وموجات الجيب المتضائلة.

(٣) رسم الطيف يظهر سيطرة للموجات ذات التكرارات العالية.

قيم المعاملات المسموح بها : $-1 < \theta_2 < 1$

$$\theta_2 + \theta_1 < 1$$

$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$

العملية المختلطة ARIMA(١,d,١)

(١) دالة الارتباط الذاتي تتناقص أسياً بعد الإبطاء الأول.

(٢) دالة الارتباط الذاتي الجزئي تتناقص أسياً بعد الإبطاء الأول.

(٣) رسم الطيف يظهر سيطرة الموجات ذات التكرارات المنخفضة.

قيم المعاملات المسموح بها $-1 < \theta_1 < +1$ ، $-1 < \phi_1 < +1$.

في معظم الحالات لا يكون واضحاً القيم التي يتعين إعطاؤها لـp وq في نموذج لتمثيل السلسلة الزمنية. أي لا يتسنى لنا الاستفادة من القواعد المذكورة أعلاه. في مثل هذه الحالات نقوم بتجربة قيم مختلفة لها ونختار النموذج الذي يعطى أفضل نتيجة (أي أقل خطأ) عند استخدامه للتنبؤ بقيم السلسلة (المعروفة)، وذلك وفق معيار معين عادة متوسط مربعات الخطأ MSE أو معامل التحديد R^2 .

الإصدارات الأخيرة من SPSS (مثلاً ١٧) تعطى خيار المنمـذج الخـبير **Expert Modeler** الذي يقوم بهذه العملية ويختار أفضل القيم لـ p و q (وأيضا d) نيابـة عنا.

٦ , ٤ تقدير المعالم Estimation of parameters

بعد تحديد نموذج (أو مجموعة نماذج مبدئية) ، وبافتراض صحته (صـحتها) تكون الخطوة أو المرحلة التالية هي تقدير المعالم $\phi_1, \phi_2, ...$ و $\theta_1, \theta_2, ...$ في النموذج أو النماذج المختارة.

هناك اسلوبان لذلك :

(i) محاولة مجموعات مختلفة من قيم المعالم بالنموذج واختيار المجموعة التي تعطـي أقـل متوسط مربعات خطأ. هذا الأسلوب يسمي المحاولة والخطأ **trial & error** .

(ii) إختيار تقديرات مبدئية للمعالم ثم إستخدامها في طريقة تكرارية مثـل خوارزميـة ماركواردت **Marquardt algorithm** (وهي طريقـة للتقـدير في النمـاذج غـير الخطية مطورة من طريقة نيوتن – قاوس للمعـادلات غـير الخطيـة.) للحصـول علـى تقديرات محسنة. في حالة التوزيع الطبيعي يمكن إثبات أن هذه المقدرات هـي مقـدرات الإمكان الأكبر. وفيما يلي توضيح لكيفية إيجاد مقدرات مبدئية.

١ , ٤ , ٦ التقدير المبدئي للمعالم في عملية الانحدار الذاتي

يمكن إيجاد تقديرات مبدئية لمعاملات الانحدار الذاتي باستخدام معادلات يول – ووكر (٥ , ١١)، التي تربط بين معاملات الانحدار الذاتي ومعاملات الارتباط الذاتي وذلك بتعويض تقديرات الارتباط الذاتي r_k في معادلات يول – ووكر ومن ثم حلها للحصول على مقدرات لل ϕ_k.

مثال (٦ , ١)

في العمليـة **ARIMA(١,d,٠)** بوضـع $k = 1$ في (٥ , ١٠) نحصـل علـى المعادلة الوحيدة

$$p_1 = \phi_1$$

وبتعويض r_1 المحسوبة من العينة بدلاً عن ρ_1 يكون التقدير المبدئي ل ϕ_1:

$$\hat{\phi}_1 = r_1$$

مثال (٦,٢)

في العملية **ARIMA(٢,d,٠)** نعوض $k = 2$ في (٥,١٠). يمدنا ذلك بالمعادلتين:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1$$
$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2$$

وبوضع r_1 و r_2 بدلاً عن ρ_1 و ρ_2 بالترتيب وحل المعادلتين نحصل على :

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1(1 - r_2)}{1 - r_1^2}$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2}$$

٦,٤,٢ التقدير المبدئي للمعالم في عملية المتوسط المتحرك

لإيجاد تقديرات مبدئيـة ل $\theta_1, \theta_2, \ldots$ في عمليـة المتوسـط المتحـرك تسـتخدم (٥,٢٦) أي

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \ldots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2} & k = 1,2,\ldots,q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

حيث نستبدل ال ρ_k ب ال r_k.

مثال (٦,٣)

للعملية **ARIMA(٠,d,١)** نعوض $k = 1$ و $q = 1$. هذا يعطي :

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

وباستبدال ρ_1 ب r_1 والحل نصل للمعادلة

$$\theta_1^2 r_1 + \theta_1 + r_1 = 0$$

ونختار بين جذرى المعادلة الجذر الذي يقع داخل النطاق المسموح به ± 1.

مثال (٦,٤)

للعملية ARIMA(٠,d,٢) بوضع $q = 2$ وk مساوية ل١ ول٢ نحصـل بالترتيـب على

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

و
$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

وبتعويض التقديرات r_1 و r_2 بدلاً عن ρ_1 و ρ_2 نحصـل علـى معـادلتين يمكن حلهما بالاستعانة بجداول وخرائط قدمها بوكس وجنكينز (١٩٧٦).

للعملية المختلطة ARIMA (١,d,١) يمكن الحصول علـى تقـدير مبـدئي ل ϕ_1 و θ_1 باستخدام العلاقات :

$$\rho_1 = \frac{(1-\theta_1\phi_1)(\phi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}$$

$$\rho_2 = \rho_1\phi_1$$

وفي كل الأحوال ، في حالة بروز مشكلة في إيجاد مقدرات مبدئية بهذه الطـرق يمكن اختيار أى تقدير بالتخمين المجرد ونترك لخوارزمية ماركواردت إكمال المهمة .

٦,٥ الاختبار التشخيصي Diagnostic checking

المرحلة الأخيرة بعد التعرف على النموذج وتقدير معالمه هو اختباره للتأكد من توافقه مع البيانات ومن أنه لا يحوى معالم لا داعي لها.

أولاً يوفق النموذج على بيانات السلسلة. أى يستخدم للتنبؤ بقيم السلسلة وكأنها غير معروفه. ثانياً تحسب البواقي حيث الباقي في الزمن t، $\hat{e}_t$ مثلاً هو الفرق بين القيمة الفعلية Y_t والتنبؤ $\hat{Y}_t$ من النموذج.

إذا كان النموذج ناجحاً فإن البواقي لن يتبقي فيها نمط منتظم وستكون أصفاراً أو قريبه من الصفر. وكذلك معاملات الارتباط الذاتي في المجتمع ستكون كلها غير معنوية ويمكن التحقق من عشوائية سلسلة البواقي وبالتالي صحة النموذج بعده طرق منها :

(١) الاستفادة من النتيجة التي تقول أنه إذا كانت السلسلة الزمنية عشوائية فإن r_k ستتبع تقريباً التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين $\frac{1}{n}$. وعليه إذا كنا نشك في أن الارتباط الذاتي بإبطاء معين **k** يختلف عن الصفر فيمكن اختبار معنويتة وإتخاذ القرار بإنه غير معنوي إذا كانت r_k تقع في الحدود $\pm 1.96\frac{1}{\sqrt{n}}$ (باستخدام مستوي معنوية ٥٪).

وإذا كانت r_k تقع داخل الحدود لكل **k** نقرر أن السلسلة عشوائية والنموذج يمثل السلسلة بشكل مقبول.

(٢) اختبار أن مجموعة من معاملات الارتباط الذاتي $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ أصفاراً باستخدام إحصائية بوكس – بيرس : **Box-Pierce**

$$Q = n' \sum_{k=1}^{m} r_k^2$$

والتي في حالة النموذج جيد والبواقي عشوائية وصغيرة تتبع توزيع χ^2 بدرجات حرية $m - s$ حيث **m** عدد معاملات الارتباط الذاتي و**s** عدد المعالم التي تم تقديرها في النموذج .وكذلك n' عدد المشاهدات في السلسلة مطروحاً منه رتبه الفرق **d** (إن أخذ الفرق).

فنقارن قيمتها المشاهدة بالقيمة الحرجة بالطرف الأيمن من توزيع χ^2 بدرجات الحرية المذكورة. فإذا كانت القيمة الحرجة أكبر من قيمة Q المحسوبة نستنتج أن السلسلة الزمنية للبواقي عشوائية والنموذج يتوافق مع البيانات بشكل جيد. نصل لنفس الاستنتاج إذا كانت قيمة P أكبر من مستوي المعنوية. لاحظ أن قيمة Q تكبر مع كبر معاملات الارتباط الذاتي.

كذلك يمكن لنفس الهدف استخدام إحصائية بوكس – لجنق **Box-Ljung** :

$$L = n'(n'+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{r_k^2}{n-k}$$

والتي – في حالة صحة عشوائية سلسلة البواقي – تتبع توزيع χ^2 بدرجات حرية $m-s$. نقرر العشوائية وبالتالي صحة النموذج إذا كانت القيمة المشاهدة أقل من الحرجة.

(٣) من مؤشرات العشوائية وصحة النموذج أيضاً أن رسم الطيف يظهر كل الموجات بارتفاع متساوٍ .

من ناحية أخري يساعد فحص الأخطاء المعيارية للمعاملات المختلفة واختبار معنويتها في معرفة المعالم التي تستحق أن تبقي في النموذج. فالمعلم غير المعنوي أو الذي له خطأً معياري كبير يمكن حذفه من النموذج.

أيضاً عند مقارنة نموذجين لتحديد أيهما أفضل تمثيلاً للبيانات نلاحظ أولاً أنه إذا تساوي نموذجان من حيث تمثيل البيانات فإن الذي يحوى إبطاءات وبالتالي معالم أقل يكون الأفضل. ذلك أن زيادة عدد المعالم يعني نقص درجات الحرية . لذلك فإن أى معيار يستخدم في المفاضلة بين النماذج ينبغي أن يأخذ هذه الحقيقة في الإعتبار. ورغم توفر عده معايير لمدى تمثيل النموذج للبيانات ولمقارنة النماذج إلا أن المعيارين الأكثر استخداماً وشهره هما معيار أكايكى للمعلومات **Information Akaike Criterion (AIC)** ومعيار شوارتز البيزى **Schwartz Bayesian Criterion (SBC)** .

ويعرف معيار أكايكى للمعلومات :

$$AIC = T\ln(SSR) + 2n^{\bullet}$$

حيث :

T: عدد المشاهدات المتاح للاستخدام.

$n^{\bullet}$: عدد المعالم التي تم تقديرها (عادة $q + p$ مع إضافة ثابت أحياناً)

(SSR) : مجموع مربعات البواقي.

كذلك يعرف معيار شوارتز البيزى :

$$SBC = T\ln(SSR) + n^{\bullet}\ln T$$

وواضح أنه كلما كانت قيمة المعيار (AIC أو SBC) صغيرة كلما كان هذا مؤشراً لنموذج أفضل. ومع تحسن توفيق النموذج تتجه قيم كل من المعيارين ل $-\infty$. وعند مقارنة نموذجين A و B لمعرفة أيهما أفضل تمثيلاً للبيانات نقرر أن A أفضل من B إذا كانت قيمة AIC أو SBC له أقل من تلك التي لB .

ومن المهم أن نلاحظ أن قيمة T يجب أن تكون متساوية في كلا النموذجين عند مقارنتهما باستخدام AIC أو SBC لأنها تؤثر في قيمتهما فمثلاً إذا كانت T في النموذج A أصغر منها في B فإن قيمة ل AIC أو SBC أصغر للنموذج A لا تعني أن A أفضل من B لإنها قد تكون ناتجة عن الفرق في قيمة T.

٦,٦ نماذج أريما الموسمية Seasonal ARIMA models

قد تظهر السلسلة الزمنية تأثيراً موسمياً يتكرر بطول فترة تكرار L مثلاً. فإذا نظرنا للقيم التي تبعد عن بعض L فترة زمنية كسلسلة زمنية ، فيمكن أن نتصور أن هذه السلسلة يمكن أيضاً أن تتأثر بعملية انحدار ذاتي أو عملية متوسط متحرك أو الأثنين معاً. ويمكن تضمين كل ذلك في نموذج أريما مطور يستوعب الجانب الموسمي في السلسلة الزمنية. ويسمي بالتالي نموذج أريما الموسمي.

يأخذ النموذج الذي تضاف إليه الموسمية الشكل :

$$ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)^{L}$$

وتمثل p ، q و d رتب عملية الانحدار الذاتي ، المتوسط المتحرك والفرق في الجـزء غـير الموسمي من النموذج وهى التي مرت علينـا سـابقاً. كمـا تمثـل P،D و Q نظـيرات هـذه الرتب في الجانب الموسمي.أما L فهى طول فترة التكرار الموسمي.

مثلاً إذا كانت البيانات شـهرية قـد تكـون $L=12$. وتوضـح هـذه الصـيغة أن أى مكوِّن في الجزء غير الموسمي من النموذج له نظير في الجزء الموسمي.ولتوضـيح كيفيـة كتابة نموذج أريما الموسمي بدلالـة مشـغل الإزاحـة للخلـف نأخـذ كمثـال النمـوذج:

$$ARIMA(1,1,1)(1,1,1)^4$$

هذا النموذج يمكن كتابته بالشكل :

$$(1-\phi_1 B)(1-\Phi_1 B^4)(1-B)(1-B^4)Y_t=(1-\theta_1 B)(1-\Theta_1 B^4)e_t$$

حيث :

$1-\phi_1 B$: مشغل عملية AR(١) غير الموسمية.

$1-\Phi_1 B$: مشغل عملية AR(١) الموسمية.

$1-B$: مشغل الفرق غير الموسمي.

$1-B^4$: مشغل الفرق الموسمي.

$1-\theta_1 B$: مشغل عملية MA(١) غير الموسمية.

$1-\Theta_1 B^4$: مشغل عملية MA(١) الموسمية.

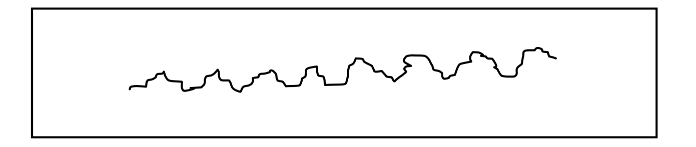
وإذا أردنا فك الأقواس نبدأ في كل طرف من أقصي الـيمين ونضـرب ونحـن نتجه لليسار كما سنري بعد قليل.

١, ٦, ٦ التأكد من وجود الموسمية

إذا كانت السلسلة الزمنية غير مستقرة فيجب أولاً إزالة عدم الاستقرار بأخـذ فرق مناسب قبل محاولة فحص السلسلة للموسمية لأن وجود عـدم الاسـتقرار يعقـد عملية اكتشاف الموسمية.

وبعد أن تصبح السلسلة مستقرة ننظر في دالة الارتباط الذاتي ، وخاصة عنـد معاملات الارتباط الـذاتي ذات الإبطـاء الكـبير (أكثـر مـن ٢). فـإذا كانـت هنـاك

معاملات ارتباط معنوية يكون هذا مؤشراً بوجود الموسمية مثلاً إذا كانت البيانات ربع سنوية فنتوقع وجود معاملات ارتباط ذاتي معنوية عند الإبطاء ٤ ومضاعفاته كذلك فإن رسم السلسلة سيظهر موجات تتكرر بطول فترة تكرار ٤. كذلك فإن طيف القوة أو البيريودقرام يظهران قوة موجبة كبيرة للموجات ذات الطول ٤ أو مضاعفاته. يوضح الشكل (٦,١) سلسلة بها تأثير موسمي. ويتم تحديد معالم النموذج الموسمي وتقدير معالمه واختباره كما في حاله غير الموسمي.



الشكل (٦,١) سلسلة بها تأثير موسمي

٦,٧ التنبؤ باستخدام نموذج أريما

بعد التوصل لنموذج أريما يناسب السلسلة الزمنية محل الدراسة وتقدير جميع معالمه والتأكد من صحته ، يمكن بعد ذلك استخدامه للتنبؤ بالقيم المستقبلية للسلسلة. ويتطلب ذلك أولاً وضع النموذج في شكل نموذج انحدار بحيث يكون المتغير التابع Y_t فقط بالطرف الأيسر من المعادلة.

فمثلاً لاستخدام النموذج أريما $ARIMA(1,1,1)(1,1,1)^4$ للتنبؤ نبدأ بفك الأقواس في :

$$(1-\phi_1 B)(1-\Phi_1 B^4)(1-B)(1-B^4)Y_t = (1-\theta_1 B)(1-\Theta_1 B^4)e_t$$

ببدء الضرب من اليمين في كل طرف :

$$(1-\phi_1 B)(1-\Phi_1 B^4)(1-B)(Y_t - Y_{t-4}) = (1-\theta_1 B)(e_t - \Theta_1 e_{t-4})$$

$$(1-\phi_1 B)(1-\Phi_1 B^4)(Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-4} + Y_{t-5}) = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \Theta_1 Y_{t-4} + \theta_1 \Theta_1 e_{t-5}$$

وبالاستمرار على هذا المنوال ونقل جميع الحدود للطرف الأيمن عدا Y_t نجد:

$$Y_t = (1+\phi_1)Y_{t-1} - \phi_1 Y_{t-2} + (1+\Phi_1)Y_{t-4} - (1+\Phi_1+\phi_1+\phi_1\Phi_1)Y_{t-5}$$
$$+(\phi_1+\phi_1\Phi_1)Y_{t-6} - \Phi_1 Y_{t-8} + (\Phi_1+\phi_1\Phi_1)Y_{t-9} - \phi_1\Phi_1 Y_{t-10}$$
$$+e_t - \theta_1 e_{t-1} - \Theta e_{t-4} + \theta_1\Theta_1 e_{t-5}$$

وللتنبؤ **m** فترة للإمام نضيف (بعد استبدال جميع العالم بمقدراتها) **m** لجميع المؤشرات. مثلاً للتنبؤ فترة واحدة $m=1$ للإمام نضيف ١ لكل المؤشرات فتصبح المعادلة :

$$Y_{t+1} = (1-\hat{\phi}_1)Y_t + \hat{\phi}_1 Y_{t-1} + (1+\hat{\Phi}_1)Y_{t-3} + \dots$$
$$+ e_{t+1} - \hat{\theta}_1 e_t - \hat{\Theta}_1 e_{t-3} + \hat{\theta}_1\hat{\Theta}_1 e_{t-4}$$

في هذه الحالة ستكون هناك بالضرورة أخطاء لم تعرف بعد (إذا كانت Y_t هى آخر قيمة في السلسلة). مثلاً في المعادلة أعلاه إذا كانت Y_t آخر مشاهدة في السلسلة الزمنية ، فبما أن Y_{t+1} لم تشاهد بعد لا يمكن معرفه e_{t+1}. لهذا عند التنبؤ نضع جميع ال e غير المعروفة أصفاراً.

٦,٨ استخدام الحاسب الآلي

الإصدارات ١٦ و ١٧ لحزمة **SPSS** تتيح خيار المنمذج الخبير **expert modeler** كما ذكرنا. اختيار المنمذج الخبير لإيجاد أفضل نموذج أريما للسلسلة الزمنية يوفر للمستخدم مهمة القيام بتجربه قيم مختلفة لرتب عمليات الانحدار الذاتي والمتوسط المتحرك والفرق (الموسمية منها وغير الموسمية) إذ يقوم هو بذلك ويقدم النموذج الذي يعطي أفضل تنبؤ وفق معيار معين.

مثال (٦,١)

لنأخذ مثال الزلاجات المائية (مثال ٢,٨). عند استخدام خدمة المنمذج الخبير فى حزمة **SPSS** (إصدار ١٧) نجد أن أفضل نموذج أريما لهذه السلسلة هو النموذج **ARIMA** $(0,0,0)(0,1,0)^{12}$ أى بصورة أخرى :

$$Y_t = \mu + Y_{t-12} + e_t$$

كذلك كانت $R^2 = 0.00$ بينما متوسط مربعات الخطأ ٢٢,٤١٣. من ناحية أخرى كانت قيمة p لاختبار Box-Ljung وقيمة p للثابت ٠,٨٣٦ و ٠,٧٧٣ بالترتيب.

يعنى ذلك أن الفرق الأول الموسمي لهذه السلسلة تنتج عنه سلسلة عشوائية (ضجة بيضاء) وأن صحة النموذج استناداً على اختبارBox-Ljung جيدة.

مثال (٦,٢)

لسلسلة زمنية شملت المبيعات الشهرية لألعاب الأطفال بمتجر (جدول (٦,١)) كان النموذج الذى تم اختياره بواسطة المنمذج الخبير هو $(1,0,0)(0,1,1)^{12}$ ARIMA والذى يمكن كتابته بالشكل :

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t - e_{t-12} - \Theta(e_{t-12} + e_{t-24})$$

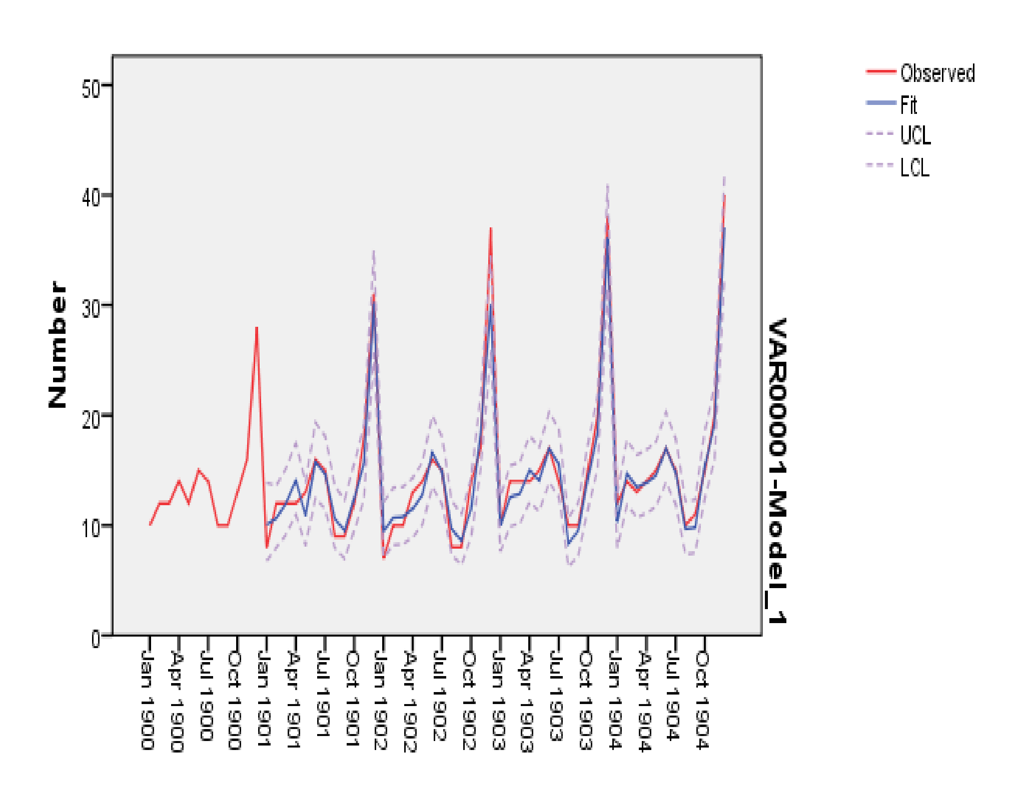
مقدرات المعالم كانت $\hat{\phi} = 0.631$ بخطأ معياري ٠,١٢٥ وهو معنوي إذ $p = 0.000$. كذلك كانت $\hat{\Theta} = 0.507$ بخطأ معياري ٠,١٩٦ وهو معنوي أيضاً بمستوى معنوية ٢٪ لأن $p = 0.013$.

كذلك $R^2 = .948$ و$RMSE = 1.673$ مما يعنى جودة توفيق النموذج. ويدعم ذلك اختبارBox-Ljung حيث كانت قيمة $p = 0.403$ وهى كبيرة. للتنبؤ إذن تستخدم المعادلة :

$$\hat{Y}_t = 0.631 Y_{t-1} + e_t - e_{t-12} - 0.507(e_{t-12} - e_{t-24})$$

وفي شكل (٦,٢) رسم للسلسلة والقيم المتنبأ بها مع فترات الثقة.

شكل (٦,٢)



المبيعات	الشهر	السنة	المبيعات	الشهر	السنة
١٥	٧	١٩٠٢	١٠	١	١٩٠٠
٨	٨		١٢	٢	
٨	٩		١٢	٣	
١٤	١٠		١٤	٤	
١٧	١١		١٢	٥	
٣٧	١٢		١٥	٦	
١٠	١		١٤	٧	

	٨	١٠		٢	١٤
	٩	١٠		٣	١٤
	١٠	١٣		٤	١٤
	١١	١٦	١٩٠٣	٥	١٥
	١٢	٢٨		٦	١٧
	١	٨		٧	١٤
	٢	١٢		٨	١٠
	٣	١٢		٩	١٠
	٤	١٢		١٠	١٥
١٩٠١	٥	١٣		١١	٢٠
	٦	١٦		١٢	٣٨
	٧	١٥		١	١٢
	٨	٩		٢	١٤
	٩	٩		٣	١٣
	١٠	١٢		٤	١٤
	١١	١٨	١٩٠٤	٥	١٥
	١٢	٣١		٦	١٧
	١	٧		٧	١٥
	٢	١٠		٨	١٠
١٩٠٢	٣	١٠		٩	١١
	٤	١٣		١٠	١٥
	٥	١٤		١١	٢٠
	٦	١٦		١٢	٤٠

جدول ١,٦



الباب السابع

نماذج أخرى متنوعة

٧,١ مقدمة

في هذا الباب نستعرض بإيجاز أنواع خاصة من نماذج السلاسل الزمنية ، كما نتناول أيضاً مشكلة تصميم نظم التحكم للأمام والخلف ، وهو موضوع ذو أهمية فائقة في تحليل السلاسل الزمنية. والهدف الأساسي هنا هو إعطاء مقدمة موجزه لكل هذه المواضيع ليتعرف القارئ على المفاهيم الأساسية المرتبطة بها .

٧,٢ نماذج الدالة التحويلية Transfer Function Models

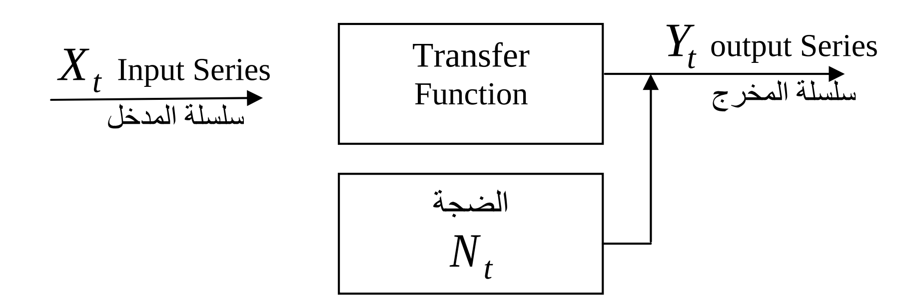
كل النماذج التي تم تناولها حتي الآن خاصة بنمذجة سلسلة زمنية واحدة مما يعني أنها نماذج وحيدة المتغير **univariate models**. ليس هناك ما يمنع من التعميم للحالة التي يكون لدينا فيها عدة*سلاسل زمنية **multiple time series** وبما أن الحسابات والخطوات المطلوبة في تحليل هذه النماذج بالغة التعقيد فإننا سنكتفي بالحالة الثنائية التي يكون فيها سلسلتان زمنيتان فقط.

٧,٢,١ تعريف الدالة التحويلية :في الدالة التحويلية الثنائية والتي سنشير اليها من الآن فصاعداً بالدالة التحويلية دون إضافة صفة الثنائية ، تكون لدينا سلسلتين زمنيتين X_t و Y_t. السلسلة X_t تسمي سلسلة المدخل **input series** والسلسلة Y_t تمثل سلسلة المخرج **output series**. فمثلاً X_t قد تكون سلسلة زمنية تمثل الصرف على الدعاية لسلعة و Y_t السلسلة الزمنية لحجم المبيعات منها.

يفترض الآن أن X_t تؤثر على Y_t من خلال علاقة أو دالة تسمي الدالة التحويلية . وتتعرض Y_t – بالإضافة لتأثير X_t – لتأثير متغيرات أخري غير معروفة يضمن تأثيرها كلها فيما يسمي بالضجة ويرمز له ب N_t .

---

* بعض الكتاب يطلق على هذه النماذج النماذج متعددة المتغيرات **Multivariate Models** وعند تطبيق طرق اريما عليها يشار لها ب**MARIMA** لكن يبدو أن من الأنسب حصر هذا المصطلح لما يسمي احيانا سلسلة زمنية متجة **vector time series** (الفصل (٧.٣))



هناك صيغتان للدالة التحويلية :

الصيغة الأولي: هذه الصيغة مفيدة في توضيح فكرة الدالة التحويلية الأساسية. وتأخذ الشكل:

$$\begin{aligned} Y_t &= v_0 X_t + v_0 X_{t-1} + \dots + v_k X_{t-k} + N_t \qquad \dots (٧,١) \\ &= \left(v_0 + v_1 B + \dots + v_k B^k\right) X_t + N_t \\ &= v(B) X_t + N_t \end{aligned}$$

حيث :

$Y_t =$ **سلسلة المخرج (مثلاً المبيعات).**

$X_t =$ **سلسلة المدخل (مثلاً الصرف على الدعاية).**

$N_t =$ **الضجة.**

$k =$ **رتبة الدالة التحويلية**

$v_1, v_2, \dots =$ **أوزان الدالة التحويلية.**

الصيغة الثانية :الصيغة الثانية يفترض فيهـا أنـه قـد تم إجـراء أي فـروق مطلوبـة وأي تحويلات مطلوبة على السلاسل N_t, Y_t, X_t لجعلها مسـتقرة مـن حيـث المتوسـط والتباين ، حيث يرمـز للسلاسـل بعـد التعـديل ب x_t، y_t، n_t بالترتيـب.كـذلك توضع الصيغة بحيث تتطلب عدداً أقل مـن المعـالم خاصـة عنـدما تكـون k في (٧,١) كبيرة. وفق هذه الصيغة تكون الدالة التحويلية :

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b x_t + n_t \qquad (٧,٢a)$$

أو

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b x_t + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} e_t \qquad (٧,٢b)$$

حيث:

$$\omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \ldots - \omega_s B^s$$
$$\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \ldots - \delta_r B^r$$
$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q$$
$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p$$

لاحظ أن $\omega(B)$و$\delta(B)$ يحلان محل $v(B)$ في تحديد العلاقة بين السلسلتين الزمنيتين ، و$\theta(B)$ و$\phi(B)$ مشغلا المتوسط المتحرك والانحدار الذاتي المطلوبين لتخليص n_t من أثر هاتين العمليتين لتبقي فقط الضجة البيضاء e_t.

أما المعالمb،r،s،pوq فتفسر كما يلي :

b: تعني أن التأخير **delay** أو الفترة (عدد الوحدات الزمنية) قبل أن تبدأ **x** في التأثير على **y** هو **b** وحدة زمنية. وعلى هذا فإن x_t سيكون تأثيرها الأول على y_{t+b} و x_{t-b} تؤثر أولاً على y_t وهكذا.

r: تعني أن **y** تتأثر بقيمها السابقة حتى إبطاء **r** . أي y_t تتأثر بy_{t-1}، y_{t-2}، ...y_{t-r}.

s: تعني أن القيمة الجديدة لـ**x** ستستمر في التأثير على **y** لعدد **s** من الفترات الزمنية. أو بمعنى آخر y_t تتأثر بالقيم من x_{t-b-s} وحتى x_{t-b} .

من ناحيـة أخـري ، فـإن السـبب في كتابـة الحـد الأول بـالطرف الأيمـن مـن (٧,٢b) هو لحصر عدد المعالم في الجزء الخاص بالعلاقة بين x وy في الدالة التحويليـة على $r + s$. ذلك أنه إذا تم فك المقدار $\delta(B)^{-1}$ كمتسلسـلة لانهائيـة فـإن عـدد المعالم التي تحدد العلاقة سيكون لانهائي أيضاً أما وضـعه بالصـورة $\frac{\omega(B)}{\delta(B)}$ فيحصـر عدد المعالم في الرقم المذكور.

٧,٢,٢ خطوات بناء نموذج دالة تحويلية

تمر عملية بناء نموذج الدالة التحويلية بنفس مراحل بناء نموذج أريما وهي تحديد النموذج ، تقدير المعالم وإجراء اختبار تشخيصي مع الفارق في أن المرحلة الأولي تمر أيضاً بعملية تنقية مكثفة للسلسلتين الزمنيتين من المـؤثرات المعروفـة. فـإذا كانت كل من سلسلة المدخل X_t والمخرج Y_t بشكلها الخام فإن خطوات بناء نموذج الدالة التحويلية يمكن تلخيصها في الخطوات التالية :

المرحلة الأولي: تحديد شكل النموذج :

تتضمن هذه المرحلة الخطوات التالية:

١. تجهيز سلسلة المدخل وسلسلة المخرج:

ويعني ذلك إجراء الفروق اللازمة لتحقيـق الاسـتقرار في المتوسـط ، وإجـراء التحويلات اللازمة لتحقيق الاستقرار في التباين. كذلك تتم في هذه الخطـوة إزالـة أى تأثير موسمي في السلسلتين إن وجد.

٢. إجراء تبييض مسبق **prewhitening** لكل من سلسلة المدخل وسلسلة المخرج:

تبيـيض السلسـلة x_t يقصـد بـه بنـاء نمـوذج أريمـا يمثلـها مـثلاً النمـوذج **ARIMA** (p_x, o, q_x) وتطبيقـه علـى x_t للحصـول علـى سلسـلة البواقي α_t من $\phi_x(B)x_t = \theta_x(B)\alpha_t$ الهدف من ذلك هو تنقية x_t بإزالـة أي نمط (معروف) ناتج عن عملية انحدار ذاتي أو متوسط متحرك فلا تبقي فيها سوي

ضجة بيضاء هي α_t.أما تبييض y_t فيتم بنفس الطريقة لكن باستخدام نفس النموذج أي نفس $\phi_x(B)$ و$\theta_x(B)$ على y_t حتى لا تختل العلاقة بين x_t و y_t بسبب اختلاف النموذج. هذا يؤدي للضجة البيضاء الخاصة ب y_t والمعرفة ب $\phi_x(B)y_t = \theta_x(B)\beta_t$.

تسمي السلسلتين الجديدتين α_t و β_t السلسلة المبيضة (مسبقاً) ل x_t والسلسلة المبيضة (مسبقاً) ل y_t بالترتيب. هذا يعني أن العلاقة بين α_t و β_t ستكون خالية من تأثيرات عمليات الانحدار الذاتي والمتوسط المتحرك.

٣. حساب الارتباطات الذاتية والارتباطات المقطعية

في هذه الخطوة تحسب الارتباطات الذاتية لسلاسل المدخل والمخرج المبيضة α_t و β_t . كذلك تحسب الارتباطات المقطعية – بإبطاءات مختلفة– بين α_t و β_t .

يعرف التغاير المقطعي **Cross covariance** من العينة بين **X** و**Y** بإبطاء **k** ويرمز له ب$C_{xy}(k)$:

$$C_{xy}(k) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}\left(X_t - \overline{X}\right)\left(Y_{t+k} - \overline{Y}\right)$$

والتباينات بالتالي :$C_{xx}(0)$ و$C_{yy}(0)$.

وعليه فإن الارتباط المقطعي بإبطاء **k** بين **X** و**Y** :

$$r_{xy}(k) = \frac{C_{xy}(k)}{\sqrt{c_{xx}(0)c_{yy}(0)}}$$

ويعطي في الواقع الارتباط بين قيم **X** في الزمن **t** وقيم **Y** التي تبعد عنها زمنياً ب**k** وحدة أي في الزمن $t + k$. وتعطي مخرجات الحاسب الآلي عادة قيم الارتباط المقطعي بيانياً.

وإذا كانت السلسلتان ضجة بيضاء فإن الارتباط المقطعي سيكون متوسطة صفر وتباينه $\frac{1}{n}$. أما إذا كانت إحداهما فقط ضجة بيضاء فأن الخطأ المعياري (١٩٤٦) **Bartlett** لارتباط مقطعي بإبطاء **k** يكون تقريباً $\sqrt{\frac{1}{n-k}}$.

وبينما تلعب الارتباطات الذاتية دوراً مهماً في نماذج أريما (ذات المتغير الواحد) تلعب الارتباطات المقطعية الدور الهام في الدالة التحويلية.

٤. تقدير مباشر لأوزان الدالة التحويلية ويقصد بالأوزان

هنا $v_1, v_2, \ldots, v_k$ في (٧ , ١). يمكن كتابة (٧ , ١) بدلالة السلاسل **X** ، **Y** و **N** بعد أن أجريت عليها الفروق والتحويلات اللازمة لجعلها مستقرة بالشكل (بافتراض $b = 0$):

$$y_t = v(B)x_t + n_t \qquad \ldots(٧,٣)$$

إذا قمنا بتبييض السلاسل الثلاث باستخدام التحويلة $\frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)}$ أي وضعنا

$$\frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} y_t = v(B)\frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} x_t + \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} n_t$$

نحصل على :

$$\beta_t = v(B)\alpha_t + e'_t$$

بضرب الطرفين في α_{t-k} وأخذ التوقع :

$$E(\alpha_{t-k}\beta_t) =$$
$$v_o E(\alpha_{t-k}\alpha_t) + v_1 E(\alpha_{t-k}\alpha_{t-1}) + \ldots + v_k E(\alpha_{t-k}\alpha_{t-k}) + E(\alpha_{t-k}e_{t)}$$

وبما أن الضجة **e** يفترض أنها مستقلة عن α ، وبما أن ال $\alpha's$ مستقلة عن بعضها ، فإن جميع الحدود في الطرف الأيمن تكون أصفاراً ما عدا الحد قبل الأخير

حيث يساوي تباين α مضروباً في v_k. أما الطرف الأيسر فهو التغاير المقطعي $c_{\alpha\beta}(B)$ وبالتالي :

$$C_{\alpha\beta}(k) = v_k C_{\alpha\alpha}(0) = v_k s_\alpha^2$$

أو

$$v_k = \frac{C_{\alpha\beta}(k)}{S_\alpha^2} = \frac{C_{\alpha\beta}(k) S_\beta}{S_\beta S_\alpha \ \ S_\alpha}$$

$$= r_{\alpha\beta}(k) \frac{S_\beta}{S_\alpha} \qquad ...(٧,٤)$$

وبالتالي يمكن تقدير الوزن ذو الرتبه **k** بضرب مقدر الارتباط المقطعي بين α_t و β_t في الانحراف المعياري للسلسلة β_t والقسمة على الانحراف المعياري للسلسلة α_t .

٥. تحديد القيم **r،s،b**

في الخطوة الخامسة من المرحلة الأولي نقوم بتحديد قيم **r،s،b**. باستثناء **b** فإن تحديد قيم لهذه المعالم ليس سهلاً. بصفة عامة يمكن الاستهداء بالقاعدة التالية عند التحديد :

نفحص الارتباطات المقطعية :

(i) فإذا كانت قيم الارتباطات المقطعية غير معنوية حتى الإبطاء **m** حيث أصبحت معنوية نأخذ $b = m$.

(ii) إذا لم يكن هناك نمطاً معيناً للارتباطات المقطعية بعد الإبطاء **m** وحتى الإبطاء $m + a$ نضع $s = a$.

(iii) إذا ظهر نمط محدد بعد $m + a$ وحتى $m + a + c$ نضع $r = c$

تطبيق هذه القاعدة لا يتوقع أن يكون سهلاً أو واضحاً فإذا تعذر تحديد القيم بسهولة يمكن تجربة عدة مجموعات من القيم واختيار المجموعة التي تعطي أقل خطأً وفق معيار مناسب مثلاً متوسط مربعات الخطأ.

٦. تقدير مبدئي للضجة n_t

بعـد تقـدير الأوزان $v_1, v_2, \ldots$ باسـتخدام (٧,٤) في الخطـوة (٤) يمكـن بالنظر ل(٧,٣) تقدير الضجة n_t من

$$n_t = y_t - v(B)x_t$$
$$= y_t - v_o x_t - v_1 x_{t-1} - \ldots - v_g x_{t-g}$$

حيث g قيمة عملية مناسبة يحددها صاحب النموذج.

٧. تحديد p_n و q_n لنموذج أريما لARIMA $(p_0, o, q_n) n_t$

لسلسلة n_t المقدرة في الخطوة (٦) نختار نموذج أريما مناسب مثلاً

$$\phi_n(B) n_t = \theta_n(B) e_t$$

حيث استخدم المؤشر n ليذكر بأن السلسلة هي سلسلة الضجة n_t.

المرحلة الثانية : تقدير معالم نموذج الدالة التحويلية

ويشمل ذلك تقـدير جميـع المعـالم الموجـودة في $\omega(B)$، $\delta(B)$، $\phi(B)$ و $\theta(B)$ في النموذج (٧.٢b). باستخدام خوارزمية ماركواردت مثلاً.

المرحلة الثالثة : الاختبار التشخيصي:

بعد تحديد شكل نموذج الدالة التحويلية (أو أكثر من نموذج لها) وتقدير جميـع المعالم لابد من اختباره للتأكد من صحته. ويتطلب ذلك فحـص البـواقي النهائيـة e_t والسلسلة α_t. ونخلص لأن النموذج مناسب إذا تم التأكد من أن :

(i) جميـع الارتباطـات الذاتيـة والذاتيـة الجزئيـة صـغيرة وعشـوائية (مـن رسمهـا أو استخدام اختبار مثل بوكس ولوجنق).

(ii) الارتباطات المقطعية بين البواقي e_t و α_t غير معنوية.

٧,٢,٣ استخدام نموذج الدالة التحويلية للتنبؤ

لاستخدام نموذج الدالة التحويلية المقـدر للتنبـؤ يجـب أولاً تفكيكـه وترتيـب حدوده لتصبح في شكل نموذج انحدار كما فعلنا في حالة نموذج أريما. غير أن العمليات

في حالة الدالة التحويلية قد تغدو معقدة للغاية. ويمكن تنفيذ كل ذلك باستخدام حزمة **SPSS** (اصدار ١٧ مثلاً) والتي تقوم باختيار وتقدير نموذج الدالـة التحويليـة عنـدما تتوفر سلسلتان زمنيتان **X** و**Y**.

وكمثال لتطبيق الدالة التحويلية نذكر أن بوكس وجنكنيز (١٩٧٦) اسـتخدما الدالة التحويلية لنمذجة العلاقة بين معدل الغاز (الداخل لفـرن غـاز) وتمثـل سلسـلة المدخل والنسبة المئوية لثاني أكسيد الكربون في الغاز الخـارج وتمثـل سلسـلة المخـرج. وكان النموذج الذي توصلا إليه هو:

$$Y_t = \frac{-(0.53+0.37B+0.51B^2)}{(1-0.57B)} X_{t-3} + \frac{e_t}{(1-1.53B+0.63B^2)}$$

ولاستخدام هذه الدالة في التنبؤ ينبغي أولاً ضرب جميع الحـدود في الأقـواس التي بالمقام ، فك الأقواس وترتيبها في شكل نموذج انحدار كما أشرنا أعلاه.

أيضاً استخدم أمستد (**Umstead** ١٩٧٧) الدالة التحويليـة للتنبـؤ بأسـعار الأسهم مستخدماً رقم قياسي مركب كسلسلة المدخل ، كما طور هلمـرو جوهانسـون (**Helmer & Johanson**) نمـوذج دالـة تحويليـة يـربط بـين مبيعـات نـوع مـن الخضروات والصرف على الدعاية.

٧,٣ تحليل التدخل **Intervention analysis**

يمكن النظر لتحليل التدخل (الفكرة أصلاً لبـوكس وتيـاو (١٩٧٥) **Box &Tiao**) كحالة خاصة من الدالة التحويلية وإمتداد لهـا. وفي أبسـط صـورة يهـدف تحليل التدخل لمعرفة كيفية تأثير حدث ما على متغير معني. مثلاً تأثير وقف الحـرب في جنوب السودان أو اكتشاف البترول على الـدخل القـومي للسـودان. أو تـأثير حظـر البترول العربي في السبعينات على اقتصاديات الدول الغربية. والتأثير المطلوب معرفته لا يقتصر فقط على معـرفة مداه ، وإنما أيضاً كم يمر من الوقت قبل أن يبدأ أثر التدخل في الظهور على المتغير محل الدراسة ولكم من الوقت يستمر.

ويأخذ النموذج في أبسط صورة الشكل :

$$Y_t = v(B)I_t + e_t$$

حيث I_t متغير مؤشر يأخذ القيمة "١" إذا كانت **t** من فترات التغير (مثلاً وقف الحرب) و"٠" إذا لم تكن كذلك. وقد تم تعميم هذه الفكرة لتشمل عدة تـدخلات. ففـي حال أعم ((١٩٨٠) **Montgomery & Weatherby**) بأخذ النموذج الصورة :

$$Y_t = \sum_{i=1}^{k} v_i(B) X_{it} + e_t$$

حيث تمثل $X_i\ (i = 1,...,k)$ متغيرات التدخلات والتي قد تكون كلها أو بعضها متغيرات صورية ثنائية القيمة.

وقد طبق تحليل التدخل بنجاح لمعرفـة تـأثير تغـيرات مختلفـة علـى مـتغيرات إقتصادية وبيئية. فقد طبق مثلاً لمعرفة تأثير دعم الجمعية الأمريكية لطب الأسنان لنوع من معجون الأسنان على سوق معجون الأسنان. كذلك استخدمت تقنية تحليـل التدخل لتحديد تأثير الحظر العربي على البترول في سبعينات القرن العشرين. وفي مجال المرور استخدام تحليل التدخل لمعرفة التأثير على عدد حوداث المـرور لتـدخلات مثـل فرض التأمين الاجباري واضراب حدث في فترة معينة لشركات التأمين. وفي مجال البيئة طبق تحليل التدخل لمعرفة تأثير تعديلات تاهيلية أساسية اجريت في سد رئيسـى علـى أداء مشروع زراعي كبير يعتمد عليه بسريلانكا.

٧,٤ السلاسل الزمنية المتجهية **Vector Time Series**

السلاسل الزمنية التي تعرضنا لها حتى الآن تتميز كل منها بأنها وحيدة المتغير. فالمتغير Y_t في السلسلة يرمز لقيمة متغير واحد (المتغير الذي تمثله السلسلة) في الـزمن **t**. وهو قبل مشاهدة قيمته متغير عشوائي يمكن أن يأخذ أى قيمة من القيم التـى تقـع فى مجاله.

نفرض الآن أنه في الزمن **t** بدلاً من أن تؤخذ مشاهدة في مـتغير واحـد (مـثلاً الطول) تؤخذ مشاهدة في كل من **m** متغير (مثلاً الطول ، الوزن ، العمر،...الخ). أى

أن المشـــاهدة في الـــزمن t ذات m بعـــد. فـــإذا رمزنـــا لهـــذه المـــتغيرات ب $Y^{(1)}, Y^{(2)}, ..., Y^{(m)}$ فإن قيم المتغيرات في الزمن t يمكن تمثيلها بالمتجة $\underline{Y}_t$ حيث :

$$\underline{Y}_t = \begin{bmatrix} Y_t^{(1)} \\ Y_t^{(2)} \\ \vdots \\ Y_t^{(m)} \end{bmatrix}$$

وعليه فإن السلسلة الزمنية المأخوذة في n وحدة زمنية تتكون من التتالي:

$$\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, ..., \underline{Y}_t, ..., \underline{Y}_n$$

هذه السلسلة سلسلة زمنية متعددة المتغيرات **Multivariate time series** وتسمى عـادة سلسلـة زمنية متهجية **vector time series**. ويعرّف المتوسـط والتغاير بنفس الطريقة التي في حالة المتغير الواحد – الفرق هو أننا هنـا نتحـدث عـن متجهات. فنجد أن متجه المتوسطات في الزمن t ويرمز له ب $\underline{\mu}_t$:

$$\underline{\mu}_t = E(\underline{Y}_t)$$

ومصفوفة التغاير ل $\underline{Y}_t$ و $\underline{Y}_{t+k}$ تعرّف ب $Cov(\underline{Y}_t, \underline{Y}_{t+k})$ وهى مصفوفة ذات رتبة **mxm** وتعطي التغاير بإبطاء **k** للـ**m** متغير في الزمن **t**.

وشرط الاستقرار (الضعيف) في حالة السلسـلة الزمنيـة متعـددة المـتغيرات مشـابه لـذلك المطلوب في حالة السلسلة وحيدة المتغير. فالسلسلة الزمنية متعددة المتغيرات تكون مستقرة إذا كان كل من متجه المتوسطات $\underline{\mu}_t$ ومصفوفة التغـاير $Cov(\underline{Y}_t, \underline{Y}_{t+k})$ مستقل عن الزمن **t**. في هذه الحالة نكتب :

$$\underline{\mu}_t = \underline{\mu} \quad \text{و}$$

$$Cov(\underline{Y}_t, Y_{t+k}) = \Sigma_k$$

لتأكيد عدم الاعتماد على t. لاحظ أن العنصر (i,i) في القطر الرئيسي ل Σ_k هو التغاير بإبطاء k للمتغير $Y^{(i)}$. بينما يسمي العنصـر (i,j) حيـث $i \neq j$ التغـاير المقطعي cross-covariance ل $Y^{(i)}$ و $Y^{(j)}$.

وكمثال لنمذجة سلسلة زمنية متعددة المتغيرات نتناول عملية انحـدار ذاتـي متعـددة المتغيرات multivariate autoregressive process أو ما يطلق عليها أحياناً عمليـة انحدار ذاتي متجهية vector autoregressive process. يرمز لهذه العمليـة اختصـاراً بVAR(P) حيث P رتبه عمليـة الانحـدار الـذاتي. هـذه العمليـة هـى تتـالي المتجهـات العشوائية $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \ldots, \underline{Y}_t, \ldots$ ذات الm بعد والتي تحقق :

$$\underline{Y}_t = \underline{\mu} + \sum_{j=1}^{P} \underline{\phi}_j \left(\underline{Y}_{t-j} - \underline{\mu} \right) + \underline{e}_t \quad \ldots (٧,١)$$

حيث

$$\underline{Y}_t = \begin{bmatrix} Y_t^{(1)} \\ \vdots \\ Y_t^{(m)} \end{bmatrix}, \underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \\ \vdots \\ \mu^{(m)} \end{bmatrix}, \underline{e}_t = \begin{bmatrix} e_t^{(1)} \\ \vdots \\ e_t^{(m)} \end{bmatrix}, \underline{\phi}_i = \begin{bmatrix} \phi_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_{2i} & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi_{mi} \end{bmatrix}$$

في هذا النموذج افترضنا أن $\underline{\phi}_j$ قطرية مما يعني أن المتغيرات في $\underline{Y}_t$ ليست دوالاً قي بعضها . في الحالة العامة (أنظر مثال (١ , ٧)) يمكن لأى متغير أن يكون دالة في مـتغير آخر بجانب قيمة السابقة مما يجعل $\underline{\phi}_j$ غير قطرية. وينتج عن تساوي العناصر المتقابلة في طرفي المعادلة m معادلة الأولى منها على سبيل المثال – تأخذ الشكل :

$$Y_t^{(1)} = \mu^{(1)} + \sum_{j=1}^{P} \phi_{1j} \left(Y_{t-j}^{(1)} - \mu^{(1)} \right) + e_t^{(1)}$$

وهو شكل عملية انحدار ذاتي برتبه P.

مثال (١ , ٧)

النموذج التالي نموذج انحدار ذاتي متجهي ذو رتبه ١ وبعدين (أى نمـوذج VAR(١) ذو البعدين). في النموذج ترمز $Y_t^{(1)}$ لمعـدل الفائـدة و $Y_t^{(2)}$ للميـل للاسـتثمار في الزمن t:

$$\underline{Y}_t = \underline{\mu} + \underline{\phi}_1 \left(\underline{Y}_{t-j} - \underline{\mu} \right) + \underline{e}_t$$

حيث :

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} m_t^{(1)} \\ m_t^{(2)} \end{bmatrix}; \underline{e}_t = \begin{bmatrix} e_t^{(1)} \\ e_t^{(2)} \end{bmatrix}; \underline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}; \underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_t^{(1)} \\ Y_t^{(2)} \end{bmatrix}$$

وحيث ال $e_t^{(\cdot)}$ متغيرات عشوائية تحقق (حيث $k = t - t'$):

$$E\left(\underline{e}_t\right) = \underline{0}; \operatorname{cov}\left(e_t^{(1)}, e_{t'}^{(2)}\right) = \begin{cases} \gamma_{1,2}(k) & t = t' \\ 0 & t \neq t' \end{cases}$$

هذا النموذج ثنائي البعد يعنى أننا نعتقد أن معدل الفائدة والميل للاستثمار يرتبطان بعلاقة تمثلها المعادلتان :

$$Y_t^{(1)} - \mu^{(1)} = \phi_{11} \left(Y_{t-1}^{(1)} - \mu^{(1)} \right) + e_t^{(1)}$$
$$Y_t^{(2)} - \mu^{(2)} = \phi_{21} \left(Y_{t-1}^{(1)} - \mu^{(1)} \right) + \phi_{22} \left(Y_{t-1}^{(2)} - \mu^{(2)} \right) + e_t^{(2)}$$

لا يختلف الأساس النظري للنمـوذج VAR(١) عـن ذلـك الـذي للنمـوذج AR(١) كثيراً. فهناك تناظر في الكثير من المواقـع. فمـثلاً إذا أخـذنا نعـوض بالتتـالي Y_{t-2} عـــن Y_{t-1}، Y_{t-3} عـــن Y_{t-2}،... في الطـــرف الأيمـــن حتـــى وصـــلنا ل $\underline{Y}_{t-t} = \underline{Y}_0$ للحالة $P = 1$ فسنصل للمعادلة :

$$\underline{Y}_t = \underline{\mu} + \sum_{j=0}^{t-1} \underline{\phi}_1^j \underline{e}_{t-j} + \underline{\phi}_1^t \left(\underline{Y}_0 - \underline{\mu} \right)$$

والتي تناظر المعادلة (٣,٥) بالباب الخامس لحالة العملية AR(١). ولتصبح هذه العملية مستقرة فإن قوى $\underline{\phi}_1$ ينبغي أن تتقارب للصفر. في حالة $\underline{\phi}_1$ مصفوفة يتطلب ذلك أن تكون الجذور المميزة ل $\underline{\phi}_1$ عددياً أقل من ١.وهناك متطلب مشابه للاستقرار للنموذج **VAR(P)**.

مثال (٢,٧)

هل عملية الانحدار الذاتي متعددة المتغيرات التالية مستقرة ؟

$$\begin{bmatrix} Y_t^{(1)} \\ Y_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1}^{(1)} \\ Y_{t-1}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_t^{(1)} \\ e_t^{(2)} \end{bmatrix}$$

لتكون العملية مستقرة يجب ان يكون الجذران المميزان للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

كلاهما عددياً أقل من ١.إذن نوجد أولاً الجذرين المميزين لهذه المصفوفة. هذين الجذرين نحصل عليهما بحل المعادلة المميزة :

$$\begin{vmatrix} 0.4-\lambda & 0.2 \\ 0.2 & 0.1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

حيث العلامة $|\;|$ تشير للمحدد. بفك المحدد نصل للمعادلة

$$(0.4-\lambda)(0.1-\lambda)-0.04=0$$

أو

$$\lambda(\lambda-0.5)=0$$

وبالتالي الجذرين المميزين هما $\lambda=0$ و $\lambda=0.5$ وبما أن $|\lambda|$ أقل من ١ لكلا الجذرين نستنتج أن العملية مستقرة.

عملية تحديد نموذج انحدار ذاتي متعدد المتغيرات وتقدير معالمه واختيار صحته تشبه كثيراً العملية المطلوبة لنموذج انحدار ذاتي وحيد المتغير.

مثال (٧,٣)

كمثال آخر نأخذ نموذج كينز البسيط للاقتصاد والـذي يـربط بـين الـدخل القـومي Y والاستهلاك C والاستثمار I من خلال المعادلات :

$$C_t = \alpha Y_{t-1} + e_t^{(1)}$$

$$I_t = \beta\left(C_{t-1} - C_{t-2}\right) + e_t^{(2)} \qquad (٧,٢)$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

فإذا عوضنا عن Y_{t-1} في المعادلة الأولي بقيمتها في الأخيرة نـتخلص مـن Y وتبقـي لدينا المعادلتين :

$$C_t = \alpha C_{t-1} + \alpha I_{t-1} + e_t^{(1)}$$

$$I_t = \beta\left(C_{t-1} - C_{t-2}\right) + e_t^{(2)}$$

ولنبقي على ترميزنا السابق بقدر الإمكان سنضع :

$$\phi_{21,2} = -\beta ، \ \phi_{22,2} = \phi_{12,2} = \phi_{11,2} = 0 ، \ \phi_{11,1} = \phi_{12,1} = \alpha ، \mathrm{Y}_t^{(1)} = C_t$$

$$\phi_{21,1} = \beta ، \ \phi_{22,1} = 0 ، \mathrm{Y}_t^{(2)} = I_t$$

وبتعريف المصفوفات :

$$\underline{e}_t = \begin{bmatrix} e_t^{(1)} \\ e_t^{(2)} \end{bmatrix} ، \ \underline{\phi}_2 = \begin{bmatrix} \phi_{11,2} & \phi_{12,1} \\ \phi_{21,1} & \phi_{22,1} \end{bmatrix} ، \ \underline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11,1} & \phi_{12,1} \\ \phi_{21,1} & \phi_{22,1} \end{bmatrix} ، \ \underline{Y}_t = \begin{bmatrix} Y_t^{(1)} \\ Y_t^{(2)} \end{bmatrix}$$

يصبح النموذج (٧,٢) بالشكل :

$$\underline{Y}_t = \sum_{j=1}^{2} \underline{\phi}_j - \underline{Y}_{t-j} + \underline{e}_t$$

وهو نموذج انحدار ذاتي متعدد المتغيرات برتبة ٢ أي (٢)VAR.

٧,٥ السلاسل الزمنية المالية Financial time series

في السنوات الأخيرة استحوذت السلاسل الزمنية المالية مثل تلك التي في مجال الأسهم على اهتمام كبير من جانب الباحثين في حقل السلاسل الزمنية. وتعكس الأدبيات كثافة الأبحاث التي أجريت ولازالت تجري في الموضوع. وفي هذا الفصل محاولة لتعريف القارئ ببعض المفاهيم الأساسية في هذا الفرع الهام من السلاسل الزمنية.

١ , ٥ , ٧ التكامل المشترك Co integration

إذا احتاجت السلسلة الزمنية لإجراء فرق ذو رتبه **d** لتصبح مستقرة يقال إنها تكاملت برتبه **d** (**Integrated of order d**) ويرمز لها ب**I(d)**. وإذا كانت كل من السلسلتين $\widetilde{Y}_t$ و $\widetilde{X}_t$ متكاملة برتبه **d** فإن أي توليفة خطية ل $\widetilde{Y}_t$ و $\widetilde{X}_t$ ستكون في الحالة العامة متكاملة برتبه **d**.

ولكن إذا كان هناك متجه $\underline{\beta}$ بحيث تكون سلسلة البواقي الناتجة عن انحدار $\widetilde{Y}_t$ على $\widetilde{X}_t$ ذات رتبة أقل ، مثلاً $d-a$ (حيث $a>0$)، فإن السلسلتين $\widetilde{Y}_t$ و $\widetilde{X}_t$ توصفان بأنهما متكاملتان معاً أو تحققان تكامل مشترك برتبة **(d,a)** أو **CI(d,a)** (التسمية ترجع لإنجل وقرانقر ١٩٨٧، **Engle & Granger**)) **Cointeg rated of order (d,a)**.

بصفة خاصة إذا كانت كل من $\widetilde{Y}_t$و $\widetilde{X}_t$ متكاملة برتبه ١ وكانت البواقي **I(٠)** فإن السلسلتين تكونان متكاملتين معاً برتبه (١ , ١) أى **CI(١ , ١)**. ويسمي المتجه $\underline{\beta}$ المتجه المكامل **Cointegrating vector**. وهناك أسباب متعددة يمكن أن تؤدى لسلسلتين بتكامل مشترك منها أن تكون أحدى العمليتين "تقود" الأخرى ، أو أن "يقاد" كليهما بعملية أخري خفية. ويعنى التكامل المشترك **CI(١ , ١)** (الذي فيه كل من السلسلتين **I(١)** وسلسلة البواقي **I(٠)**) أنه رغم أن كل من السلسلتين غير مستقرة إلا أن حركتهما في المدى الطويل تكون مرتبطة وتتجه نحو وضع توازن تكون فيه الفروقات بينهما ثابتة وسلسلة البواقي من إنحدار إحداهما على

الأخرى مستقرة.لاحظ أن البواقي هى توليفه خطية في السلسلتين.

مثال (٤ , ٧)

سعر التبادل للدولار الأمريكي بالنسبة للجنية البريطاني ، X_t ، يفترض انه يعتمد على القوة الشرائية $\frac{P_t}{Q_t}$ حيث P_t و Q_t الرقم القياسي للمستهلك في الولايات المتحدة وبريطانيا بالترتيب. وقد وجد أن حركة سعر التبادل يمكن تمثيلها بالنموذج :

$$\ln X_t = \ln \frac{P_{t=}}{Q_t} + Y_t$$

$$Y_t = \mu + \phi(Y_{t-1} - \mu) + e_t + \beta e_{t-1}$$

حيث e ضجة بيضاء بمتوسط صفر و $|\phi| < 1$.

من ناحية أخرى تبين أن كل من $\ln P_t$ و $\ln Q_t$ يمكن تمثيلها بنموذج أريما (٠ , ١ , ١)ARIMA أي بالنموذجين (بالترتيب) :

$$(1-\phi_1 B)(1-B)(\ln P_t - \mu_t) = e_t^{(1)}$$

و
$$(1-\phi_2 B)(1-B)(\ln Q_2 - \mu_2) = e_t^{(2)}$$

هذا يعنى أن كل من العمليتين $\ln P_t$ و $\ln Q_t$ غير مستقرة لأنها تحتاج لأخذ فرق برتبة ١ لتصبح مستقرة. بمعني آخر كل منهما I(١). كذلك لوغارثم سعر التبادل X_t غير مستقر وهو أيضاً I(١). أما Y_t فهي أرما مستقرة (١ , ١)ARMA (كما تشير بذلك معادلتها) وعليه فإن المتجه $\{\ln X_t, \ln P_t, \ln Q_t\}$ متكامل برتبة I(١).

لكن هناك متجه $\underline{\beta} = [1,-1,1]$ بحيث أن التوليفة الخطية (باستخدام المعادلة الأولي):

$$\ln X_t - \ln P_t + \ln Q_t = \ln \frac{P_t}{Q_t} + Y_t - \ln P_t + \ln Q_t = Y_t$$

والتي هي كما ذكرنا مستقرة أي متكاملة برتبة ٠((٠)I).

إذن تتالى المتجهات $\{\ln X_t, \ln P_t, \ln Q_t\}$ حيث $t = 1,2,...$ يمكن نمذجته بنموذج تكامل مشترك (١ , ١)I المتجه المكامل فيه هو (١ , ١ -١,) .

مثال ٧, ٥

لدينا العمليتان :

$$X_t = 0.65X_{t-1} + 0.35Y_{t-1} + e_t^x$$
$$Y_t = 0.35X_{t-1} + 0.65Y_{t-1} + e_t^x$$

(i) أثبت أن كل من X_t و Y_t متكاملة برتبة "١" أي (١)I

(ii) أثبت أن العمليتين X_t و Y_t تحققان تكاملاً مشتركاً بمتجه مكامل (١-،١).

الحل :

(i) من المعادلة الأولي يمكن التعبير عن Y_{t-1} بدلالة X_t و X_{t-1} :

$$Y_{t-1} = \frac{1}{0.35}(X_t - 0.65X_{t-1} - e_t^x)$$

وإذا عوضنا هذه القيمة في الطرف الأيمن من المعادلة الثانية بدلاً عن Y_{t-1} وفي الطرف الأيسر (بعد زيادة كل المؤشرات بمقدار١) بدلاً عن Y_t نجد

$$\frac{1}{0.35}(X_{t+1} - 0.65X_t - e_{t+1}^x)$$
$$= 0.35X_{t-1} + \frac{0.65}{0.35}(X_t - 0.65X_{t-1} - e_t^y) + e_t^y$$

وبعد التبسيط

$$X_{t+1} = 1.3X_t - 0.3X_{t-1} + e_{t+1}^x - 0.65e_t^x + 0.35e_t^y$$

وواضح أن X_{t+1} غير مستقرة لأن القيمة المطلقة لمعامل X_t أكبر من ١. لكن إذا أخذنا الفرق الأول أي طرحنا X_t من الطرفين نحصل على

$$\nabla X_{t+1} = 1.3X_t - 0.3X_{t-1} + e_{t+1}^x - 0.65e_t^x + 0.35e_t^y - X_t$$

$$= 0.3X_t - 0.3X_{t-1} + e_{t+1}^x - 0.65e_t^x + 0.35e_t^y$$

حيث $\nabla = B - 1$. وبما أن كل معاملات X في الطرف الأيمن أقل عـدديأ من ١ تكون ∇X_{t+1} مستقرة. إذن X_t متكاملة برتبة "١" أي (١)I. بنفس الطريقـة يمكن أن نرى أن Y_t أيضاً (١)I.

(ii) إذا كانت العمليتـان X_t و Y_t تحققـان تكـاملاً مشـتركاً برتبـة (١ , ١) ومتجـه مكامل $\{1,-1\}$ ، فلابد أن تكون التوليفة :

$$L = X_t - Y_t$$

مستقرة أي (٠)I.

الآن:

$$X_t - Y_t = 0.65X_{t-1} - 0.35X_{t-1} + 0.35Y_{t-1} - 0.65Y_{t-1} + e_t^x - e_t^y$$
$$= 0.3X_{t-1} - 0.3Y_{t-1} + e_t^x - e_t^y$$
$$= 0.3Z + (e_t^x - e_t^y)$$

حيث $Z = X_{t-1} - Y_{t-1}$. وبما أن معامل الانحدار الذاتي عددياً أقل من ١ فإن هذه العملية (٠)I.

كذلك بما أن كل مـن X_t و Y_t متكاملـة برتبـة "١" أي (١)I وهنـاك متجـه $\underline{\beta} = \{1,-1\}$ بحيث التوليفة الخطيـة $X_t - Y_t$ متكاملـة برتبـة "٠" أي (٠)I إذن X_t و Y_t تحققان تكاملاً مشتركاً (١ , ١)CI.

٢ , ٥ , ٧ النماذج المصححة للتوازن **Equilibrium correction model**

يرتبط مفهوم التكامل المشترك بشكل وثيق بنماذج تربط بـين السـلوك قصـير المدى والسلوك طويـل المـدى في المـتغيرات الاقتصـادية ، وهـى مـا يعـرف بالنمـاذج

المصححة للتوازن وأحيانا تسمي النماذج المصححة للخطأ (**Error correction model**) ويرمز لها اختصاراً ب**ECM**.

لإعطاء فكرة مبسطة عن هذه النماذج نأخذ النموذجين :

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \omega_0 X_t + \omega_1 X_{t-1} + e_t \qquad \dots (٧,٣)$$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t \qquad \dots (٧,٤)$$

حيث ال X وال Y في شكل لوغارثمات و e_t ضجة بيضاء تتبـع التوزيـع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين σ^2 .

النموذج (٧,٣) نموذج حركي (أي بابطاءات) **dynamic model** تمثل فيه ω_0 مثلاً التغير المتوقع في Y_t عند إبقاء تأثير X_{t-1} و Y_{t-1} محـدداً. فهـي بالتـالي تمثل التغير قصير الأجل في Y_t الناتج عن تغير في X_t . يوصف مثـل هـذا النمـوذج بأنه نموذج قصير الأجل **short –run model** لأنه يمثل سلوك المـتغيرات في المـدى القصير.

أما النموذج (٧,٤) فيمثل سلوك المـتغيرات في المـدى الطويـل عنـدما تصـل العلاقة بين **X** و**Y** لحالة توازن.

النموذج (٧,٣) يوضح سلوك المتغيرات في المدى القصير ومدى اعتمادها على ابطـاءات سابقة ، ولكنه بسبب احتوائه على متغيرات بابطاءات قـد يعـاني مـن مشـكلة الاشـتراك الخطي **multicollinearity** بكل مشاكلها وانعكاسـاتها علـى المقـدرات واختبـارات الفروض ، كما أنه قد يتضمن متغيرات غير مستقرة ، يؤدي الاتجـاه العـام فيهـا لارتبـاط وانحدار زائف بينها. أما النموذج (٧,٤) فهو بـدورة لا يظهـر السـلوك قصـير المـدى في المتغيرات (مثلاً التعديلات على Y_t الناتجة عن الابطاءات في Y_t و X_t)

أفرض الآن أننا أجرينا إعادة معلمة للنموذج (٧,٣) على الشكل التالي :

$$Y_t - Y_{t-1} = \phi_0 - Y_{t-1} + \phi_1 Y_{t-1} + \omega_0 X_t - \omega_0 X_{t-1} + \omega_0 X_{t-1} + \omega_1 X_{t-1} + e_t$$

$$\nabla Y_t = \omega_0 \nabla X_t + \phi_0 - (1-\phi_1) Y_{t-1} + (\omega_0 + \omega_1) X_{t-1} + e_t$$

$$=\omega_0\nabla X_t+(1-\phi_1)\frac{\phi_0}{(1-\phi_1)}-(1-\phi_1)Y_{t-1}+(1-\phi_1)\frac{(\omega_0+\omega_1)}{1-\phi_1}X_{t-1}+e_t$$

$$=\omega_0\nabla X_t+(1-\phi_1)\beta_0-(1-\phi_1)Y_{t-1}+(1-\phi_1)\beta_1 X_{t-1}+e_t$$

... (٧,٥)

$$\nabla Y_t=\omega_0\nabla X_t-(1-\phi_1)\left[Y_{t-1}-\beta_0-\beta_1 X_{t-1}\right]+e_t$$

المقدار داخل القوس المربع يمثل الفرق بين الطرف الأيمن والأيسر في (٧,٤) وهو بالتالي يمثل الانحراف عن حالة الاتزان (في المدى الطويل) بينما الحد الأول يمثل السلوك في المدى القريب. (بافتراض أن X وY تحققان تكاملاً مشتركاً). فالنموذج (٧,٥) إذن يحتوي الآثار قصيرة المدى وبعيدة المدى معاً بينما تعطى $(1-\phi_1)$ فكرة عن المدى أو السرعة التي تتغير بها y_t في حالة عدم الاتزان أي عندما $y_{t+1}-\beta_0-\beta_1 X_{t-1}\neq 0$.

لهذا يسمي النموذج (٧,٥) نموذج مصحح للتوازن (أو للخطأ). ومن المزايا الأخرى لهذا النموذج أن كل المتغيرات فيه (بافتراض التكامل المشترك) تكون مستقرة وبهذا يمكن تطبيق طرق الانحدار بما فيها من اختبارات فروض وتقدير بأمان.

وتجدر الإشارة إلي أنه يمكن تصميم النموذج **ECM** لحالة عدة إبطاءات كما يمكن تعميمه لحالة تعدد المتغيرات.

٧,٥,٣ نموذج آرش وامتداداته The ARCH model & extensions

في السلاسل الزمنية المالية مثل تلك التي تعطى أسعار الأسهم ، لوحظ أن أى تغير كبير في السعر يعقبه تقلب (تباين) كبير فيه ، قد يكون في الاتجاهين ، ويستمر لفترة. كذلك فإن التغير الصغير في السعر تعقبه فترة تقلبات صغيرة. هذا يعنى أن التباين في العملية المولدة للسعر يعتمد على حجم السعر السابق. هذه هي الخاصية التي يشار إليها باختلاف التباينات الشرطي **Conditional heteroscedasticity**

في جميع النماذج السابقة كنا حين نتحدث عن ثبات التباين (أو المتوسط) فإننا نعني الثبات في المدى الطويل (عندما $t\to\infty$). هذا التباين غير المشروط بتوفر

معلومات معينة في الأزمنة قبل t يسمى التباين غير الشرطى **Unconditional variance**.

أما التباين في الزمن t والمشروط بمعرفة القيم حتى الزمن $t-1$ فيسمى التباين الشرطي **Conditional variance**. وتعريفنا للاستقرار سابقاً كان يستخدم التباين غير الشرطي. لهذا فإن التباين الشرطي قد يكون غير ثابت ولكن السلسلة مستقرة ما دام التباين غير الشرطي ثابت.

لإيجاد نموذج يستوعب التغيرات الوقتية في التباين أي يسمح للتباينات الشرطية أن تعتمد على الزمن وفي نفس الوقت للتباين غير الشرطي أن يظل ثابتاً طور انجل (١٩٨٢) **Engle** ما عرف بنموذج آرش (**ARCH**) وهو اختصار لاختلاف تباين شرطي ذو انحدار ذاتي **Conditional heteroscedasticity Autoregressive**.

ولتوضيح نموذج آرش في ابسط صورة وهو آرش ذو الرتبة "١" أي **ARCH(١)** نفترض أن لدينا النموذج **AR(١)**:

$$\tilde{Y}_t = \phi \tilde{Y}_{t-1} + e_t \qquad \ldots (٧,٦)$$

حيث ال e_t متغيراً عشوائية مستقلة يتبع كل منها نفس التوزيع الذي وسطه الحسابي ٠ وتباينه σ^2. أيضاً نفرض أن $|\phi| < 1$.

ليمكن لهذا النموذج أن يتضمن التباين الشرطي أقترح انجل (١٩٨٢) تعديل النموذج ليصبح

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{Y}_t = \phi \tilde{Y}_{t-1} + e_t \quad (٧,٧.a) \\ &e_t = \in_t \sqrt{(\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2)} \quad (٧,٧.b) \end{aligned}\right\} \ldots (٧,٧)$$

وحيث $\in_t$ مستقلة ولها نفس التوزيع بمتوسط صفر وتباين ١ ، وحيث $\alpha_0 > 0$ و$0 < \alpha_1 < 1$. الجديد في هذا النموذج أن التباين الشرطي في أي زمن t معبر عنه

كدالة في مربع الخطأ في الزمن السابق أي e_{t-1}^2. هذا يسمح بإبراز الـتغير العنيـف في التباين في الزمن $t-1$ في التبـاين الشـرطي. كـذلك فـإن القيـود علـى α_0 و α_1 وضعت لتفادي الحصول على تباين سالب.

في هذا النموذج نلاحظ أن متوسط e_t غير الشرطي ثابت لأن

$$E(e_t) = E\left\{\in_t (\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= E(\in_t)E(\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

لأن ال $\in_t$ مستقلة و $E(\in_t) = 0$.

كـذلك فـإن التبـاين غـير الشـرطي ثابـت إذ بمـا أن $E(e_t) = 0$ فـإن $V(e) = E(e_t^2)$ وبتعـويض قيمـة e_t مـن (٧,٧) وتـذكر أن ال $\in$ مسـتقلة وتباينها ١:

$$V(e) = E(\in_t^2)E(\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2)$$
$$= E(\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2)$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1 E(e_{t-1}^2)$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1 E(e_{t-2}^2))$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1 E(e_{t-3}^2))$$
$$= \alpha_0 + \alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_1^2 + \alpha_0\alpha_1^3 + \dots$$
$$= \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$$

من مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية بما أن $|\alpha_1| < 1$.

وهكذا نرى أن كل من المتوسط غير الشرطي والتباين غير الشرطي للنمـوذج (٧ , ٧) ثابت مع الزمن.

الآن إذا رمزنا للمعلومات المناسبة المتوفرة حتى الزمن $t-1$ ب I_{t-1} فـإن المتوسط الشرطي (أي علماً بالقيم حتى الزمن $t-1$) ل e_t:

$$E(e_t / I_{t-1}) = E(\in_t (\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} / I_{t-1})$$
$$= E(\in_t / I_{t-1}) E((\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} / I_{t-1})$$

بما أن ال e_t مستقلة. كذلك إذا علمنا I_{t-1} وبالتالي قيمة e_{t-1}^2 فإن الحد في القوس الأخير يكون ثابتاً ، وبالتالي

$$E(e_t / I_{t-1}) = E(\in_t / I_{t-1}) = 0$$

من ناحية أخري فإن التباين الشرطي يكون (بما أن $E(e_t / I_{t-1}) = 0$):

...(٧ , ٨)

$$V(e_t / I_{t-1}) = E(e_t^2 / I_{t-1}) = E(\in_t^2 / I_{t-1})(\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2)$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1 + e_{t-1}^2$$

لأن تباين $\in_t$ واحد. هذا يعني أن التباين الشرطي غـير ثابـت ويعتمـد علـى الـزمن. لاحظ أن التباين الشرطي ل $\widetilde{Y}_t$ يساوي التباين الشـرطي ل e_t لكـن المتوسـط يكـون $\phi \widetilde{Y}_{t-1}$. بما أن e_t لها تباين شرطي (من ٧ , ٨) غير ثابت ويأخذ الشكل :

$$V(e_t / I_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2$$

وهو في الواقع عملية انحدار ذاتي برتبة "١" فإن e_t تمثل اختلاف تباين شـرطي ذو انحدار ذاتي برتبة "١" أي **ARCH(١)** . وبما أن $\widetilde{Y}_t$ لها نفس التباين الشرطي مثـل ذلك الذي ل e_t فإنها أيضاً تمثل عملية **ARCH(١)** .

ويمكن تعميم ARCH(١) في اتجاهات مختلفة. مثلاً نموذج انحدار ذاتي برتبة P بخطأ آرش برتبة ARCH(q))q يأخذ الشكل :

$$\widetilde{Y}_t = \gamma + \sum_{i=0}^{P} \phi_i \widetilde{Y}_{t-1} + e_t$$ ...(٧,٨a)

...(٧,٨)

$$e_t = \in_t \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i e_{t-1}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ ...(٧,٨b)

حيث ال $\in_t$ مستقلة ولكل منها متوسط "٠" وتباين ١. كذلك نموذج انحدار متعدد برتبة k بخطأ آرش برتبة q :

$$\widetilde{Y}_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \widetilde{X}_{it} + e_t$$ ...(٧,٩a)

...(٧,٩)

$$e_t = \in_t \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i e_{t-1}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ ...(٧,٩b)

كما يمكن تعميم آرش لحالة المتغيرات المتعددة .

وترجع أهمية نموذج آرش إلى أنه يمكن استخدامه للتنبؤ بالتقلبات (الأخطار) المستقبلية ، مما اكسبه جاذبية وأدى لشيوع استخدامه.

ومنذ أن عرف انجل بنموذج آرش عام ١٩٨٢ ، حدثت إضافات متعددة إليه على أيدي عدد من الباحثين. فقد عمم بوليرسلف (١٩٨٦) Bollerslev نموذج آرش ليشمل إضافة إبطاءات للتباين الشرطي نفسه في النموذج. فإذا كان المتغير التابع $\widetilde{Y}_t$ يمثل ب(٧,٩a) فإن بوليرسلف عرف النموذج التالي ل e_t:

$$e_t = \in_t \left[\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{P} \beta_i h_{t-i}\right]^{\frac{1}{2}}$$

حيث h_t التباين الشرطي في الزمن t.وحيث ال $\in_t$ مستقلة ولكل منها نفس التوزيـــــــــع بمتوســــــــــط صــــــــفر وتبــــــاين ١. أيضــــــــاً $\beta_j \geq 0$،$i = 1,...,q$،$\alpha_i \geq 0$،$\alpha_0 > 0$،$q > 0$،$P \geq 0$ و $j = 1,...,P$. يســـمي هــــذا النمـــوذج نمـــوذج آرش المعمـــم **ARCH Generalized** ويرمز له اختصاراً ب**GARCH(p,q)** أو قارش.

وتتوفر عدة برامج لتقدير المعـالم في آرش وقـارش تسـتخدم طريقـة الإمكـان الأكـبر حيـث يـتم تعظـيم دالـة الإمكـان عـددياً. ومـن هـذه الـبرامج **Pc Give** و**G@Rch**.

٧,٦ السلاسل الزمنية غير الخطية **Nonlinear Time-series Models**

الشكل العام لنموذج انحدار ذاتي غير خطـي برتبـة **P** ويشـار إليـه اختصـاراً **NLAR(P)** هو :

$$\tilde{Y}_t = f(\tilde{Y}_{t-1}, \tilde{Y}_{t-2}, ..., \tilde{Y}_{t-P}) + e_t \qquad ...(٧,١٠)$$

حيث $f(\cdot)$ دالة بشكل ما في القيم السابقة ل**Y**.

المشكلة الرئيسية في تقدير مثل هذا النموذج هـو أن شـكل الدالـة $f(\cdot)$ عـاده غـير معروف. إحدى الطرق لمعالجة ذلك هو استخدام مفكوك تيلر للحصول علـى تقريـب للشكل المجهول للدالة. تقريب تيلر ل(٧,١٠) يأخذ الشكل

$$Y_t = a_o + \sum_{i=1}^{p} a_i Y_{t-i} + \sum_{i}^{p} \sum_{j}^{p} \sum_{k}^{r} \sum_{l}^{s} a_{ijkl} Y_{t-i}^{k} Y_{t-j}^{l} + e_t$$

وكمثال لذلك الانحدار الذاتي غير الخطي برتبة "١" أي **NLAR(١)** :

$$y_t = f(y_{t-1}) + e_t$$

والذي يمكن إعادة معلمته ليصبح :

$$y_t = a_1(y_{t-1}).y_{t-1} + e_t \qquad ...(٧,١١)$$

نلاحظ أن (٧,١١) تشبه عملية AR(١) من حيث الشكل باستثناء أن a_1 سمح لها بأن تكون دالة في y_{t-1} .

٧,٧ تصميم نظم التحكم Design of control systems

نختم هذا الباب بمجال هام وذو طبيعة متميزة تطبق فيه طرق تحليل السلاسل الزمنية وهو تصميم نظم التحكم ، والذي يكون الهدف من ورائه تصميم نظام تحكم يؤدي لأن يكون مخرج عملية ما منحرف عن الهدف المحدد بأقل درجة ممكنة.

ففي كثير من النظم ، مثلاً في الهندسة الصناعية ، يكون هناك مدخل (مادة معينه مثلاً) ومخرج ناتج عنه (منتج معين مثلاً). ويكون مطلوباً أن يكون المخرج (المنتج) محققاً لصفه مستهدفة معينة. لكن لأسباب مختلفة يتعرض المدخل لتغيرات disturbances تجعل المخرج تتقلب قيمته حول القيمة الهدف. فإذا كان من الممكن قياس هذه التغيرات في المدخل (في فترات زمنية متتالية ومتساوية) ، وإذا كان هناك متغير آخر – متغير تحكم Control variable – يؤثر في المخرج ويمكننا التحكم فيه ، فمن الطبيعي أن نعتقد أنه يمكن تصميم نظام تحكم يمكننا من أن نجرى – بمجرد مشاهدة مقدار التغير في المدخل – تعديلات في متغير التحكم تعوض عن أو تلغي (أو على الأصح تقلل) من أثر التغيير في المدخل . هذا الإجراء يسمى تحكم بالتغذية للأمام feed forward control .

في أحيان أخرى لا نعرف مصدر التغير أو لا يتيسر قياسه. في هذه الحالة نعتمد فقط على مدى انحراف قيمة المخرج عن الهدف في حساب التعديلات التي ينبغي إجرائها في متغير التحكم. يسمى هذا النوع من التحكم تحكم بالتغذية للخلف feed backward control . في حالات أخرى يستخدم الاثنان معاً : تحكم بالتغذية للأمام للتعويض عن آثار التغيرات في المدخل التي يمكن قياسها وتحكم بالتغذية للخلف للتعويض عن التغيرات التي لا يمكن قياسها .يسمى هذا feed back feed forward –control .

وتقوم هذه النظم على بناء نماذج – دوال تحويلية – تربط بين كل من سلسلة المدخل وسلسلة متغير التحكم وسلسلة المخرج. ومن ثم حساب معادلة التحكم Control equation التي تعطى أقل انحرافات عن الهدف في دالة المخرج – إن نفذت – وفق معيار مناسب عادة متوسط مربعات الخطأ الذي يقيس الخطأ الكلي.

ويتم تنفيذ خطوات التحكم بشكل أو توماتيكى يشبه طرق التحكم في التيرموستات ، أو الطيار الآلي أو الصواريخ الموجهة بالأقمار الصناعية. فمثلاً قد يتم التحكم من خلال الحاسب الآلي حيث يقوم الحاسب بحساب الفعل الذي تقتضيه معادلة التحكم ومن ثم ينفذ تلقائياً من خلال بعض محولات الطاقة المناسبة التي تقوم بفتح وقفل صمامات تؤدي لتعديل متغير المخرج. وهناك وسائل تحكم آلية وكهربائية أخرى تستخدم أحياناً في تنفيذ ما تتطلبه معادلة التحكم.

في هذا الفصل نتعرض بإيجاز لهذه الطرق. ويمكن لتفاصيل أعمق الرجوع لبوكس – جنكنيز (Box –Jenkins ١٩٧٦).

١ ,٧ ,٧ التحكم بالتغذية للأمام

سنستخدم للتوضيح المثال الذي أورده بوكس وجنكينز . فنفترض أنه في صناعة مركب كيميائي معين يعتقد أن لزوجة المنتج Y_t تتأثر جزئياً بالتغيرات في تركيز المدخل Z_t، حيث يمكن مشاهدة وقياس Z_t لكن لا يمكن التحكم فيها. هناك متغير آخر (متغير التحكم) هو ضغط البخار X_t يمكن قياسه والتحكم فيه وهو يؤثر في Y_t. مجموع الآثار الأخرى للمتغيرات غير Z_t و X_t التى تؤثر في Y_t نرمز لها ب N_t.

نفترض أيضاً أن كل من Z،X،Y وN قد أخذت كانحراف من قيم مرجعية. ويقصد بالقيم المرجعية القيم التي إذا حققتها المتغيرات يكون المنتج محققاً للهدف تماماً دون أي انحراف عنه. وواضح أنه إذا كانت قيم المتغيرات في الزمن t مثلاً هى القيم المرجعية فإن $N_t = 0$ ، $X_t = 0$، $Z_t = 0$ و $Y_t = 0$.

نفترض أيضاً أن المشاهدات في جميع المتغيرات تؤخذ في فترات زمنية متتالية ومتساوية الطول.

متغير المدخل Z يفترض أنه يرتبط بمتغير المخرج Y من خلال الدالة التحويلية :

$$Y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b Z_t \quad ...(٧,١٢)$$

بمجرد أن تتوفر المشاهدات ..., Z_t, Z_{t-1} تجرى تعديلات على متغير التحكم X في الأزمنة ...,$t, t-1$. وبما أن التعديل يجرى في أزمنة متقطعة فإن المنتج يكون في شكل قفزات ، لهذا نرمز لقيمة X في الفترة t الي $t+1$ ب X_{t+} .

من ناحية أخرى ، نفرض أن الدالة التحويلية التي تربط بين X_{t+} و Y_t تأخذ الشكل :

$$Y_t = \frac{L_2(B)}{L_1(B)} B^{f+1} X_{t+} \quad ...(٧,١٣)$$

في كل من (٧,١٢) و (٧,١٣) $\omega(B)$ ، $\delta(B)$ ، $L_1(B)$ ، $L_2(B)$ كثيرات حدود في B بينما b و $f+1$ الفترة التي تنقضي قبل تأثير Z_t على Y_t و X_{t+} على Y_t بالترتيب.

الآن إذا لم يجر أي تحكم (أي بقيت $X_t = 0$ لكل t) فإن الخطأ الكلي في المخرج سيتكون من أثر Z_t كما توضحه (٧,١٢) وبقية الأخطاء التي رمزنا لها ب N_t . في هذه الحالة يكون الخطأ :

$$e_t = N_t + \delta^{-1}(B)\omega(B)Z_{t-b} \quad ...(٧,١٤)$$

لكننا نستطيع من خلال التعديل في X باستخدام (٧,١٣) التأثير في الجزء المقاس من الخطأ والذي يمثله الحد الثاني بالطرف الأيمن من (٧,١٤). ولرؤية كيف يتم ذلك نلاحظ أولاً أنه في الزمن t يكون الخطأ الكلي الناتج عن المؤثر Z (بما أن Z تستغرق فترة b لتؤثر في Y) هو (من (٧,١٢)):

$$\frac{\omega(B)}{\delta(B)} Z_{t-b}$$

بينما تأثير التعويض X هو (من (٧,١٣)) :

$$\frac{L_2(B)}{L_1(B)} X_{t-(f+1)+}$$

وبالتالي نستطيع أن نلغي تأثير Z_t إذا جعلنا تأثير متغير التحكم X مساوياً لسالب تأثير Z أي إذا وضعنا

$$\frac{L_2(B)}{L_1(B)} X_{t-(f+1)+} = -\delta^{-1}(B)\omega(B)Z_{t-b}$$

والذي يصبح إذا رفعنا المؤشر في الطرفين بمقدار $f+1$:

$$\frac{L_2(B)}{L_1(B)} X_{t+} = -\frac{\omega(B)}{\delta(B)} Z_{t-b+f+1} \quad \dots (٧,١٥)$$

المعادلة (٧,١٥) هي معادلة التحكم التي تحدد لنا الإجراء الذي يتعين علينا اتخاذه في الزمن t للتعويض أو لإزالة الانحراف عن الهدف $Y_t = 0$ الذي تتسبب فيه Z.

عند تنفيذ إجراء التحكم الذي تتطلبه (٧,١٥) ننتبه إلى أنه في الزمن $t-$ الزمن الذي نجري فيه التعديل - ستكون $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots$ غير متوفرة.

لهذا ليتسنى لنا تطبيق (٧,١٥) يجب أن يسبق تأثير X (علىY) الذي نطلبه تأثير Z. بمعني آخر يجب أن يتحقق أن الفترة التي تبدأ فيها X في التأثير على Y لا تزيد عن تلك التي تبدأ فيها Z في التأثير عليها أي يجب أن يكون :

$$b-(f+1) \geq 0$$

في هذه الحالة تكون لدينا جميع قيم Z التي تتطلبها معادلة التحكم ، ويكون التعديل المطلوب في الزمن t هو :

$$X_{t+} = -\frac{L_1(B)\omega(B)}{L_2(B)\delta(B)} Z_{t-b+(f+1)} \quad \dots (٧,١٦)$$

ويمكن أيضاً بدلاً من أن يكون التعـديل بدلالـة X_{t+} نفسـها يكـون بدلالـة التغير فيهـا أي بدلالـة $x_t = X_{t+} - X_{t-1+}$. في هـذه الحالـة تكـون (٧,١٦) بالشكل:

$$x_t = -\frac{L_1(B)\omega(B)}{L_2(B)\delta(B)}\left\{Z_{t-b+(f+1)} - Z_{t-1-b+f+1}\right\} \quad \dots (٧,١٧)$$

لكن ماذا إذا كانت $b-(f+1)<0$ ؟ في هذه الحالـة يصـل تـأثير Z للمنتج قبل أن يتمكن أثر متغير التحكم X من الوصول إليه. وتكون هناك لذلك قيم لZ مطلوبة في (٧,١٦) لم تشاهد بعد. وعليه لا يمكن تطبيق معادلة التحكم بشـكلها في (٧,١٦).

في هذه الحالة يمكن استخدام طريقة تعتمـد علـى تنبـؤات بقـيم Z المسـتقبلية (بوكس و جنكيز **Box –Jenkeis** ،١٩٧٦)) هذه الطريقة كما يلي:

نضع الطرف الأيمن من (٧,١٢) باستثناء مشغل الإزاحة B^b:

$$Z'_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} Z_t \quad \dots. (٧,١٨)$$

كدالة خطية لا نهائية في الأخطاء e_t والـتي يفـترض أن لكـل منهـا متوسـط صفر وتباين σ_e^2 ، أي نضع :

$$Z'_t = \left\{1 + \sum_{j+1_{Z'}}^{\infty} \Psi_j B^j\right\} e_t$$

إذا رمزنا للتنبؤ في الزمن t بقيمة Z' التي تقع L فترة الأمام ب $\hat{Z}_t'(L)$ ، فإن القيمة الفعلية ل Z' التي تقع L فترة للأمام من الزمن t أي Z'_{t+L} تكون بالطبع مجموع التنبؤ مضافاً إليه خطأه أي :

$$Z'_{t+L} = \hat{Z}'_t(L) + \hat{e}'_t(L)$$

حيث $\hat{e}'_t(L)$ خطأ التنبؤ في الزمن $t + L$. وبالتالي فإن قيمة Z' الفعلية في الزمن $t - b + f + t$ تكون

$$Z'_{t-b+f+1} = \hat{Z}_t{}'(f+1-b) + \hat{e}'_t(f+1-b)$$

وبتعويض هذه القيمة في (٧,١٦) بدلاً عن

$$\frac{\omega(B)}{\delta(B)} Z_{t+f+1-b}$$

تصبح معادلة التحكم :

... (٧,١٩)

$$X_{t+} = -\frac{L_1(B)}{L_2(B)} \left\{ \hat{Z}'_t(f+1-b) + \hat{e}'_t(f+1-b) \right\}$$

لكن بما أن $b < f + 1$ فإن جميع الأخطاء e في الحد الثاني داخل القوس تكون غير موجودة في الزمن t ، كما أنها غير مرتبطة بأي متغير معروف في الزمن t ، لهذا لا يمكن التنبؤ بها. لهذا تحذف هذه الأخطاء أي تعتبر جميعها أصفاراً . بالتالي تصبح معادلة التحكم

$$X_{t+} = -\frac{L_1(B)}{L_2(B)} \hat{Z}'_t(f+1-b) \quad \dots (٧,٢٠)$$

أو إذا أردنا صيغة بدلالة التغير :

$$x_t = -\frac{L_1(B)}{L_2(B)} \left(\hat{Z}'_t(f+1-b) - \hat{Z}'_{t-1}(f+1-b) \right)$$

٧,٧,٢ التحكم بالتغذية للخلف

في هذه الحالة الدليل الوحيد المشاهد لوجود أخطاء في المنتج هو انحرافه عن الهدف. ولهذا يكون التحكم باستخدام هذا الانحراف.

تمثل N_t في هذه الحالة مجموع الآثار على المنتج التي أدت لانحرافه عن الهدف. بطريقة أخري هي الانحراف عن الهدف الذي سنشاهده في الزمن t إذا لم يحدث إجراء تحكم.

نفرض أنه يمكن تمثيل N_t بالنموذج :

$$N_t = \phi^{-1}(B)\theta(B)e_t = \left\{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j B^j\right\} e_t \quad \ldots (٧,٢١)$$

حيث e_t ضجة بيضاء (أخطاء).

الدالة التحويلية التي تربط متغير التحكم X ومتغير المنتج Y كما في (٧,١٣) هي :

$$Y_t = \frac{L_2(B)}{L_1(B)} B^{f+1} X_{t+} \quad \ldots (٧,٢٢)$$

الأثر الكلي للمؤثرات (Z وغيرها) يساوي N_t.

والأثر الكلي لمتغير التحكم X يساوي الطرف الأيمن من (٧,٢٢). وبالتالي فإن أثر المؤثرات سيقضي عليه إذا وضعنا

$$\frac{L_2(B)}{L_1(B)} B^{f+1} X_{t+} = -N_t \quad \text{أو} \quad \frac{L_2(B)}{L_1(B)} X_{t-(f+1)} = -N_t$$

أو برفع المؤشرات بمقدار $f+1$:

$$X_{t+} = \frac{L_1(B)}{L_2(B)} N_{t+f+1}$$

ولكن الآثار N لا يمكن مشاهدتها عند الزمن t لأن $f+1>0$. ولكن من النموذج (٧,٢١) وباستخدام الأخطاء السابقة يمكن إيجاد التنبؤ من الزمن t للخطأ في الزمن الذي يبعد L وحدة زمنية للأمام أي إيجاد $\hat{N}_t(L)$. وبما أن التنبؤ بـ N_{t+f+1} هو $\hat{N}_t(f+1)$ فإن معادلة التحكم تكون:

$$X_{t+} = \frac{L_1(B)}{L_2(B)} \hat{N}_t(f+1)$$

أو بدلالة المتغير $x_{t+} = \frac{L_1(B)}{L_2(B)} \left\{ \hat{N}_t(f+1) - \hat{N}_{t-1}(f+1) \right\}$

يمكن التعميم بتصميم تحكم يتضمن تحكم للأمام وتحكم للخلف في نفس الوقت. كما يمكن تعميم النتائج السابقة لتشمل التحكم في الحالة التي يكون لدينا فيها عدد من سلاسل المدخلات.

المراجع :

١. Bartlett, M.S.(١٩٤٦) , "On the Theoretical Specification of Sampling Properties of Autocorrelated Time series" J.of the Royal stat . Society , Series B,٨,P.٢٧.

٢. Bollerslev T. (١٩٨٦). "Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity" , Journal of Econometrics ٣١ , ٢٠٧-٣٢٧.

٣. Box G.E.P & Jenkins , G.M. (١٩٧٦). "Time – Series Analysis: Forecasting and Control, "Revised" Holden -Day series .

٤. Box, GEP & Tiao G.C. (١٩٧٥) Intervention analysis with applications to Economic and Environmental Problems. Journal of the American Statistical Association, ٧٠ No.٧٤٩,PP٧٠-٧٩.

٥. Bowerman B. & O'Connell R.(١٩٩٣) "Forecasting and Time Series- An Applied Approach" Duxbury Thomson Learity.

٦. Chow, W.M. "Adaptive Control of the Exponential Smoothing Constant" (١٩٦٥) Journal of Industrial Engineering,١٦, No٥.

٧. Dickey , D.A. & Fuller, W.A. (١٩٧٩). "Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root". Journal of the American Statistical Association , ٧٤, PP٤٢٧-٤٣١.

٨. Engle, R.F. ١٩٨٢, "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdam inflation", Econometrics ٥٠, ٩٨٧- ١٠٠٧.

٩. Engles R.F. & Granger C.W.J. (١٩٨٧) ."Cointegration and error correction: Representation, estimation and testing. Econometrica, ٥٥, ٢٥١–٢٧٦.

١٠. Euders W. " Applied Econometrics time series " (٢٠٠٤). John Wiley & sons.

١١. Harris, R. and Sollis, R. (٢٠٠٥), "Applied Time Series Modelling and Forecasting " John Wiley & sons.

١٢. Helmer R.M and Johansson J .(١٩٧٧) "An Extension of the Box-Jenkins Transfer Function Analysis with an Application to the Advertising – Sales relationship " Journal of Marketing Research , ١٤,May,PP٢٢٧- ٣٩.

١٣. Holt, C. C. (١٩٥٧) "Forecasting Trends and Seasonals by exponentially weighted moving averages" O .NR. O.N.R. Memorandum No.٥٢, Carnegie Institute of Technology.

١٤. Makridakis S., Wheelwright s., and McGee, V. (١٩٨٣): "Forecasting: Methods and Applications" John Wiley

١٥. Montgomery D.C, and Weatherly G.(١٩٨٠) " Modeling and Forecasting Time series using Transfer Function & Intervention Methods "AIIE Transactions , December , PP ٢٨٩- ٣٠٧.

١٦. Phillips, P.C.B. and Perron P. (١٩٨٨) "Testing for unit root in time series regression". Biometrika , ٧٥, ٣٣٥—٣٤٦.

١٧. Sargan, J. D. and Bhargava, A. (١٩٨٣). "Testing Residuals from Least Squares. regression for being generated by the Gaussian random walk', "Econometrica ٥١, ١٦٥٣- ١٧٤.

١٨. Tukey J.W.(١٩٦١) "Discussion, emphasizing the connection between analysis of variance and spectrum analysis" Technometrics.

١٩. Umstead D.(١٩٧٧) "Forecasting stock market prices " The Journal of Finance , ٣٢,NO.٢,May PP٤٢٧- ٤.

٢٠. Winters, P. R. (١٩٦٠) "Forecasting sales by exponentially weighted moving averages" Management science. ٦ PP٣٢٤.

٢١. Yule, G.U. (١٩٢٧) " On a method of investigating the periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers" Phil Trans,A.٢٢٦- ٢٦٧.

الفهرس